с координатами $\{x^1, \ldots, x^m\}$ некоторого большего многообразия с координатами $\{y_1, \ldots, y_p, x^1, \ldots, x^m\}$. Однако изучение подмногообразий мы начнём в ином аспекте, и лишь в гл. 4 увяжем его с дифференциальными уравнениями.

Пусть P — точка подмногообразия S (размерности m) многообразия M (размерности n). Всякая кривая в S, проходящая через точку P, будет также кривой в M, проходящей через P; отсюда очевидным образом следует, что касательный вектор к такой кривой в точке P является элементом как пространства T_P, касательного к M в точке P, так и пространства V_P, касательного к S в точке P. В действительности V_P есть векторное подпространство размерности m в T_P. С другой стороны, произвольный вектор, принадлежащий T_P, но не принадлежащий V_P, не имеет однозначной «естественной» проекции на V_P (напомним, что в общем случае понятие ортогональности не вводится).

Для один-форм в точке P ситуация в точности обратная. Пусть T_P^* — сопряжённое к T_P пространство; это совокупность всех один-форм в точке P, каковые суть функции, определённые на всём T_P. Аналогично пусть V_P^* — сопряжённое к V_P, т. е. пространство один-форм в точке P, рассматриваемой уже как точка многообразия S. Произвольная один-форма из T_P^* определяет один-форму из V_P^*, получаемую просто ограничением со всего T_P на его подпространство V_P. Наоборот, данному элементу из V_P^* нельзя однозначно сопоставить элемент из T_P^*, ибо, зная лишь значения один-формы на V_P, вообще говоря, нельзя сказать, каковы будут её значения на векторах, не принадлежащих V_P.

Итак, вектор, определённый на подмногообразии S, будет также вектором на многообразии M, а один-форма на M будет также один-формой на S. Обратные же утверждения неверны. К один-формам и подмногообразиям мы вернёмся в гл. 4, а пока сосредоточим внимание на векторных полях.

3.7. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА НА ЯЗЫКЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

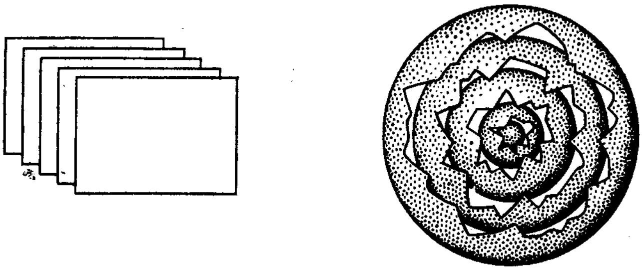
В произвольной карте подмногообразия S имеются координаты $\{y^a, a = 1, \ldots, m\}$ и базис $\{\partial/\partial y^a\}$ векторных полей на S. Эти базисные поля коммутируют:

$$[\partial/\partial y^a, \quad \partial/\partial y^b] = 0. \tag{3.17}$$

Упражнение 3.5. (a) Покажите, что если $\bar{V}$ и $\bar{W}$ — линейные комбинации (необязательно с постоянными коэффициентами) m попарно коммутирующих векторных полей, то и скобка Ли $\bar{V}$ и $\bar{W}$ будет линейной комбинацией тех же m полей.

(b) Докажите тот же результат для случая, когда попарные скобки Ли m векторных полей не обязательно нулевые, а являются линейными комбинациями этих же m полей.

Из упр. 3.5 (а) следует, что скобка Ли двух *произвольных* векторных полей на *подмногообразии* S касается того же подмногообразия S, ибо эти поля являются линейными комбинациями коммутирующих полей $\{\partial/\partial y^a\}$. Важный факт состоит в том, что верно и обратное утверждение: *если m век-*

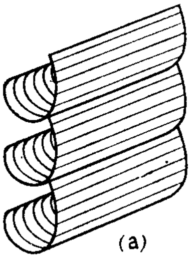


(a) (b)

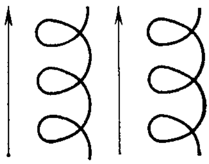
Рис. 3.6. (а) Слоение многообразия R^3, образованное параллельными плоскостями. Каждая точка R^3 принадлежит одной плоскости данного слоения. Показано только несколько таких плоскостей. (b) Слоение многообразия R^3, образованное концентрическими сферами. Центр этих сфер является особой точкой слоения.

торных полей класса C^∞, *определённых* в некоторой *области* U многообразия M, *имеют попарные скобки Ли, являющиеся линейными комбинациями этих же m векторных полей, то интегральные кривые этих полей образуют некоторое семейство подмногообразий.* Размерность, которую имеет каждое такое подмногообразие, равна размерности векторного пространства, натянутого на эти поля в произвольной точке, т. е. самое большее m, но может быть и меньше (этот случай рассматривается в § 3.9). Каждая точка области U принадлежит одному и только одному такому подмногообразию, при условии что размерность векторного пространства, порождённого полями, одна и та же всюду в U. Такое семейство подмногообразий заполняет U во многих отношениях вполне аналогично тому, как это делает конгруэнция кривых (см. § 2.12), и называется *слоением* области U. Каждое подмногообразие является листом этого слоения. Два примера слоений можно увидеть на рис. 3.6.

Сформулированное утверждение носит название *теоремы Фробениуса.* Доказательство этой теоремы вкратце излагается в следующем параграфе, но основную идею легко понять и так. Если интегральные кривые различных полей определяют некоторое подмногообразие, они должны оставаться касательными к нему: ни одна кривая не может начать «выпячиваться», «вылезать» из него. Такое касание может быть гарантировано в том случае, если все указанные скобки Ли сами будут касательными к нему, поскольку каждая такая скобка Ли — это просто производная одного из наших векторных полей вдоль другого. Если ни одно из векторных полей не имеет производной, торчащей из данной гиперповерхности, то ни одна интегральная кривая не покинет этой гиперповерхности.



(a)



(b)

Рис. 3.7. В R^3 векторное поле $dx/d\lambda = -\sin\lambda$, $dy/d\lambda = \cos\lambda$, $dz/d\lambda = 1$ "поднимается" по спирали в вертикальном направлении [1], с радиусом спирали 1. (a) Это спиральное поле и базисное векторное поле, отвечающее координате x, образуют семейство поверхностей, причём каждая точка пространства R^3 принадлежит одной из поверхностей семейства. Одна такая поверхность представлена на рисунке; она выглядит как волнистая (но не закрученная в спираль!) лента. На рисунке мы смотрим на неё чуть сверху (если считать плоскость x, y горизонтальной) и видим некоторые участки одной стороны ленты (горизонтальные линии) и некоторые участки другой её стороны (спиральные линии). (b) Два векторных поля, не образующих подмногообразия: спиральное поле и базисное поле, отвечающее координате z. Ни для какой точки плоскость, определяемая двумя этими полями в этой точке, не будет касаться "соседних" (сверху или снизу) спиральных кривых.

перповерхности. На рис. 3.7 представлено несколько примеров. Когда мы займёмся изучением дифференциальных форм, мы познакомимся с еще одним вариантом теоремы Фробениуса и увидим, что эта фундаментальная теорема даёт условия существования решений систем дифференциальных уравнений в частных производных («условия интегрируемости»).

3.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА

Пусть в некоторой открытой области U' многообразия M заданы m' векторных полей, которые в каждой точке P этой области порождают некоторое подпространство пространства

[1] Надо представить себе, что горизонтальная плоскость (скажем, плоскость x, y) совершает поступательное движение вверх по спирали. — *Прим. ред.*