ляют некоторое подмногообразие, они должны оставаться касательными к нему: ни одна кривая не может начать «выпячиваться», «вылезать» из него. Такое касание может быть гарантировано в том случае, если все указанные скобки Ли сами будут касательными к нему, поскольку каждая такая скобка Ли — это просто производная одного из наших векторных полей вдоль другого. Если ни одно из векторных полей не имеет производной, торчащей из данной гиперповерхности, то ни одна интегральная кривая не покинет этой ги-

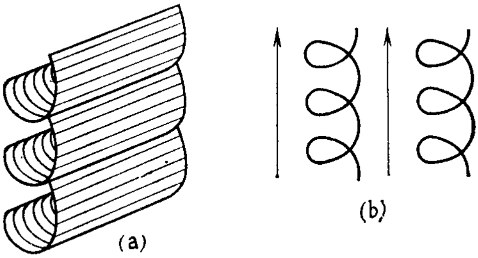

Рис. 3.7. В R^3 векторное поле $dx/d\lambda = -\sin\lambda$, $dy/d\lambda = \cos\lambda$, $dz/d\lambda = 1$ "поднимается" по спирали в вертикальном направлении [1], с радиусом спирали 1. (a) Это спиральное поле и базисное векторное поле, отвечающее координате x, образуют семейство поверхностей, причём каждая точка пространства R^3 принадлежит одной из поверхностей семейства. Одна такая поверхность представлена на рисунке; она выглядит как волнистая (но не закрученная в спираль!) лента. На рисунке мы смотрим на неё чуть сверху (если считать плоскость x, y горизонтальной) и видим некоторые участки одной стороны ленты (горизонтальные линии) и некоторые участки другой её стороны (спиральные линии). (b) Два векторных поля, не образующих подмногообразия: спиральное поле и базисное поле, отвечающее координате z. Ни для какой точки плоскость, определяемая двумя этими полями в этой точке, не будет касаться "соседних" (сверху или снизу) спиральных кривых.

перповерхности. На рис. 3.7 представлено несколько примеров. Когда мы займёмся изучением дифференциальных форм, мы познакомимся с еще одним вариантом теоремы Фробениуса и увидим, что эта фундаментальная теорема даёт условия существования решений систем дифференциальных уравнений в частных производных («условия интегрируемости»).

3.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА

Пусть в некоторой открытой области U' многообразия M заданы m' векторных полей, которые в каждой точке P этой области порождают некоторое подпространство пространства

[1] Надо представить себе, что горизонтальная плоскость (скажем, плоскость x, y) совершает поступательное движение вверх по спирали. — *Прим. ред.*

T_P, имеющее размерность $m \leqslant m'$. (Множество всех таких подпространств называется *m-мерным распределением на M*; эти распределения не следует путать с распределениями типа дельта-функции, рассмотренными нами в § 2.18.) По крайней мере в некоторой окрестности U произвольной точки P из U' можно выбрать m полей, образующих линейно-независимый базис для всего нашего множества полей; эти поля $\{\bar{V}_{(a)},\ a = 1, \ldots, m\}$ будут (согласно упр. 3.5 (b)) обладать в U следующим свойством:

$$[\bar{V}_{(a)},\ \bar{V}_{(b)}] = \sum_c \alpha_{abc} \bar{V}_{(c)}. \tag{3.18}$$

Поэтому на самом деле нет необходимости рассматривать случай, когда эти поля не являются линейно-независимыми: такое множество всегда сводится локально к линейно-независимому множеству меньшей размерности. Размерность многообразия M пусть будет n.

Когда имеется только одно векторное поле $\bar{V}$ (т. е. $m = 1$), теорема тривиальна. Ясно, что если $\bar{V}(P) \neq 0$, то в U существуют интегральные кривые, и каждая кривая является одномерным многообразием, подмногообразием многообразия M.

Для случая $m \geqslant 2$ доказательство проводится по индукции. Прежде всего установим одно полезное соотношение, которое нам понадобится при проведении индукции. Используя (3.14), легко показать, что для произвольной функции f и произвольного векторного поля $\bar{V}$ выполняется соотношение

$$\pounds_{\bar{V}}(\tilde{d}f) = \tilde{d}(\pounds_{\bar{V}} f). \tag{3.19}$$

Кроме того, из (3.15) вытекает, что для произвольного векторного поля $\bar{W}$

$$\pounds_{\bar{V}}\langle\tilde{d}f,\ \bar{W}\rangle = \langle\pounds_{\bar{V}}\tilde{d}f,\ \bar{W}\rangle + \langle\tilde{d}f,\ \pounds_{\bar{V}}\bar{W}\rangle. \tag{3.20}$$

Объединяя эти соотношения и учитывая тот факт, что $\pounds_{\bar{V}}\bar{W} = [\bar{V},\ \bar{W}]$, получаем нужное нам соотношение

$$\langle\tilde{d}f,\ [\bar{V},\ \bar{W}]\rangle = \pounds_{\bar{V}}\langle\tilde{d}f,\ \bar{W}\rangle - \langle\tilde{d}(\pounds_{\bar{V}} f),\ \bar{W}\rangle. \tag{3.21}$$

Возвращаясь к основному доказательству, заметим прежде всего, что если все m векторных полей *коммутируют* (имеют попарные нулевые скобки Ли), то в соответствии с конструкцией, описанной нами в § 2.15, они определяют систему координат для точек, принадлежащих их интегральным кривым, т. е. определяют искомое семейство подмногообразий многообразия M. Чтобы доказать существование этих подмногообразий в общем случае (когда скобки Ли линейно выражаются через поля), мы построим m линейно-независимых линейных комбинаций исходных полей, которые уже будут коммутировать. Итак, предположим, что мы имеем m линейно-независимых векторных полей $\bar{V}_{(a)}$, скобки Ли которых линейно выражаются через них же. Рассмотрим одно из них, скажем поле $\bar{V}_{(m)} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda_m$. Параметр $\lambda_{(m)}$ вдоль конгруэнции поля $\bar{V}_{(m)}$ определён в каждой точке и, следовательно, является функцией в области U многообразия M, которую мы рассматриваем. Коль скоро это функция, определён её градиент $\tilde{d}\lambda_{(m)}$. Воспользуемся им следующим образом. Определим $m-1$ векторных полей $\bar{X}_{(a)}$, являющихся линейными комбинациями всех исходных полей $\bar{V}_{(a)}$ и удовлетворяющих соотношениям

$$\langle \tilde{\mathrm{d}}\lambda_{(m)}, \bar{X}_{(a)}\rangle = 0, \quad a = 1, \ldots, m-1. \tag{3.22}$$

Эти соотношения определяют векторные поля $\{\bar{X}_{(k)}\}$ с точностью до их линейных комбинаций. Далее (согласно упр. 3.5 (b)), мы имеем

$$[\bar{X}_{(a)}, \bar{X}_{(b)}] = \sum_{c=1}^{m-1} \beta_{abc}\bar{X}_{(c)} + \gamma_{ab}\bar{V}_{(m)}, \tag{3.23}$$

$$[\bar{V}_{(m)}, \bar{X}_{(a)}] = \sum_{b=1}^{m-1} \mu_{ab}\bar{X}_{(b)} + \nu_a\bar{V}_{(m)}, \tag{3.24}$$

где β_{abc}, γ_{ab}, μ_{ab} и ν_a суть функции в области U. Свернём эти соотношения с $\tilde{d}\lambda_{(m)}$ и используем формулы (3.21), (3.22) и простое тождество[1])

$$\langle \tilde{\mathrm{d}}\lambda_{(m)}, \bar{V}_{(m)}\rangle = \pounds_{\bar{V}_{(m)}}\lambda_{(m)} = \mathrm{d}\lambda_{(m)}/\mathrm{d}\lambda_{(m)} = 1$$
$$\Rightarrow \tilde{\mathrm{d}}\left(\pounds_{\bar{V}_{(m)}}\lambda_{(m)}\right) = 0. \tag{3.25}$$

После свёртки левые части (3.23) и (3.24) дадут нуль, и в конечном итоге мы находим, что $\gamma_{ab} = \nu_a = 0$. Отсюда следует, что скобки Ли полей $\bar{X}_{(a)}$ не содержат поля $\bar{V}_{(m)}$. Именно этого мы и хотели добиться, когда налагали условие (3.22).

Используем теперь предположение индукции, а именно что произвольные $m-1$ векторных полей, скобки Ли которых линейно выражаются через них же, порождают семейство $(m-1)$-мерных подмногообразий. Поскольку $\{\bar{X}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$—как раз такие поля, они порождают семейство $(m-1)$-мерных подмногообразий, заполняющее U. Определим множество векторных полей $\{\bar{Y}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$,

[1]) Ниже и в некоторых других местах книги автор использует знак $\Rightarrow$ просто как замену слов «откуда следует, что». — *Прим. ред.*

образующих координатный базис для одного из этих подмногообразий, скажем S', таким образом, чтобы эти поля коммутировали на S'. Продолжим их до полей $\{\bar{Z}_{(a)},\ a = 1, \ldots, m-1\}$ (определённых и вне S') при помощи переноса Ли вдоль $\bar{V}_{(m)}$:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{Z}_{(a)} = \bar{Y}_{(a)} \text{ на } S' \\ &[\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}] = 0 \text{ в } U \text{ вдоль всякой интегральной} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{кривой поля } \bar{V}_{(m)}, \text{ пересекающей } S' \end{aligned}\right\}$$
$$\text{при } a = 1, \ldots, m-1. \tag{3.26}$$

Доказав, что поля $\bar{Z}_{(a)}$ попарно коммутируют всюду, а не только на S', мы получим полный набор коммутирующих полей $\{\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$, и теорема будет доказана. Но сначала надо установить, что каждое поле $\bar{Z}_{(a)}$ попрежнему будет линейной комбинацией полей $\bar{V}_{(a)}$. Фактически мы покажем, что оно является линейной комбинацией одних полей $\bar{X}_{(a)}$, без $\bar{V}_{(m)}$. Поскольку каждое поле $\bar{Z}_{(a)}$ определяется однозначным образом, попробуем искать решения системы (3.26) в виде линейной комбинации

$$\bar{Z}_{(a)} = \sum_b \alpha_{ab} \bar{X}_{(b)}.$$

Используя (3.24) при $v_a = \dot{0}$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = [\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}] &= \pounds_{\bar{V}(m)} \bar{Z}_{(a)} \\ &= \sum_b (\pounds_{\bar{V}(m)} \alpha_{ab}) \bar{X}_{(b)} + \sum_b \alpha_{ab} [\bar{V}_{(m)}, \bar{X}_{(b)}] \\ &= \sum_b \frac{d\alpha_{ab}}{d\lambda_m} \bar{X}_{(b)} + \sum_{bc} \alpha_{ab} \mu_{bc} \bar{X}_{(c)}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где все суммы берутся в пределах от 1 до $m-1$. Переобозначая в последней сумме индексы суммирования ($b \to c$, а $c \to b$), приходим к равенству

$$0 = \sum_b \left(d\alpha_{ab}/d\lambda_m + \sum_c \alpha_{ac} \mu_{cb} \right) \bar{X}_b.$$

Поскольку $\bar{X}_{(a)}$ линейно-независимы, мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_{ab}}{d\lambda_m} + \sum_c \alpha_{ac} \mu_{cb} = 0. \tag{3.28}$$

Начальные условия (на подмногообразии S') для величин α_{ab}, состоящие в том, что соответствующая линейная комбинация полей $\bar{X}_{(b)}$ даёт поле $\bar{Y}_{(a)}$, определяют единственное решение этой системы, которое всегда существует. Следовательно, в каждой точке поля $\bar{Z}_{(a)}$ являются линейными комбинациями полей $\bar{X}_{(a)}$.

И наконец заметим, что после переноса Ли наши поля продолжают коммутировать:

$$[\bar{Z}_{(a)}, \bar{Z}_{(b)}] = 0, \ a, b = 1, \ldots, m-1. \tag{3.29}$$

Это можно доказать, используя тождество Якоби (упр. 2.3) для полей $\bar{V}_{(m)}$, $\bar{Z}_{(a)}$ и $\bar{Z}_{(b)}$. Итак, мы имеем m полей $\{\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$, которые попарно коммутируют и, следовательно, образуют координатный базис для некоторого подмногообразия размерности m. Поскольку исходные поля $\{\bar{V}_{(a)}\}$ являются линейными комбинациями этих m полей, теорема доказана.

3.9. ПРИМЕР: ГЕНЕРАТОРЫ ВРАЩЕНИЙ

Читатели, знакомые с моментом импульса в квантовой механике, могли обнаружить, что обсуждавшиеся выше понятия им хорошо известны. Рассмотрим в сферических координатах (ненормированный) базисный вектор, отвечающий координате φ; часто его обозначают через $\bar{e}_\varphi$:

$$\bar{e}_\varphi = -y\bar{e}_x + x\bar{e}_y,$$

где $\bar{e}_x$ и $\bar{e}_y$ — векторы обычного декартова базиса в $\mathbb{R}^3$. В наших обозначениях это соотношение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Обозначим левую часть этого равенства — так называемый «оператор момента импульса» в z-направлении — через $\bar{l}_z$:

$$\bar{l}_z = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

(От формулы, принятой в квантовой механике, наша формула отличается отсутствием множителя $\hbar/i$.) Аналогичным образом можно определить $\bar{l}_x$ и $\bar{l}_y$ и вычислить коммутаторы (скобки Ли)

$$\begin{aligned} [\bar{l}_x, \bar{l}_y] &= -\bar{l}_z, \\ [\bar{l}_y, \bar{l}_z] &= -\bar{l}_x, \\ [\bar{l}_z, \bar{l}_x] &= -\bar{l}_y. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Следовательно, эти три вектора определяют некоторое подмногообразие. Поскольку векторов три, может создаться впечатление, что это подмногообразие непременно трёхмерное,