шение этой системы, которое всегда существует. Следовательно, в каждой точке поля $\bar{Z}_{(a)}$ являются линейными комбинациями полей $\bar{X}_{(a)}$.

И наконец заметим, что после переноса Ли наши поля продолжают коммутировать:

$$[\bar{Z}_{(a)}, \bar{Z}_{(b)}] = 0, \ a, b = 1, \ldots, m-1. \tag{3.29}$$

Это можно доказать, используя тождество Якоби (упр. 2.3) для полей $\bar{V}_{(m)}$, $\bar{Z}_{(a)}$ и $\bar{Z}_{(b)}$. Итак, мы имеем m полей $\{\bar{V}_{(m)}, \bar{Z}_{(a)}, a = 1, \ldots, m-1\}$, которые попарно коммутируют и, следовательно, образуют координатный базис для некоторого подмногообразия размерности m. Поскольку исходные поля $\{\bar{V}_{(a)}\}$ являются линейными комбинациями этих m полей, теорема доказана.

3.9. ПРИМЕР: ГЕНЕРАТОРЫ ВРАЩЕНИЙ

Читатели, знакомые с моментом импульса в квантовой механике, могли обнаружить, что обсуждавшиеся выше понятия им хорошо известны. Рассмотрим в сферических координатах (ненормированный) базисный вектор, отвечающий координате φ; часто его обозначают через $\bar{e}_\varphi$:

$$\bar{e}_\varphi = -y\bar{e}_x + x\bar{e}_y,$$

где $\bar{e}_x$ и $\bar{e}_y$ — векторы обычного декартова базиса в $\mathbb{R}^3$. В наших обозначениях это соотношение запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Обозначим левую часть этого равенства — так называемый «оператор момента импульса» в z-направлении — через $\bar{l}_z$:

$$\bar{l}_z = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

(От формулы, принятой в квантовой механике, наша формула отличается отсутствием множителя $\hbar/i$.) Аналогичным образом можно определить $\bar{l}_x$ и $\bar{l}_y$ и вычислить коммутаторы (скобки Ли)

$$\begin{aligned} [\bar{l}_x, \bar{l}_y] &= -\bar{l}_z, \\ [\bar{l}_y, \bar{l}_z] &= -\bar{l}_x, \\ [\bar{l}_z, \bar{l}_x] &= -\bar{l}_y. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Следовательно, эти три вектора определяют некоторое подмногообразие. Поскольку векторов три, может создаться впечатление, что это подмногообразие непременно трёхмерное, т. е. должно совпадать со всем пространством. В действительности же это подмногообразие двумерно. В самом деле, если положить $r \equiv (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, то $\bar{l}_x(r) = \bar{l}_y(r) = \bar{l}_z(r) = 0$. Иначе это можно выразить так:

$$\tilde{d}r(\bar{l}_x) = \tilde{d}r(\bar{l}_y) = \tilde{d}r(\bar{l}_z) = 0. \tag{3.31}$$

В силу нашего описания градиента $\tilde{d}r$ как множества поверхностей постоянного r и в силу описания его свёртки, скажем с $\bar{l}_x$, как числа поверхностей, которые $\bar{l}_x$ «протыкает», из (3.31) вытекает, что все три оператора $\bar{l}_x$, $\bar{l}_y$ и $\bar{l}_z$ *касательны* в сфере $r = \text{const}$. Следовательно, в любой точке эти операторы линейно-зависимы и порождают подмногообразие размерности два — эту самую сферу, конечно.

Упражнение 3.6. Покажите, что утверждение упр. 3.3 останется справедливым, если заменить $\overline{W}$ *произвольным* тензорным полем.

Упражнение 3.7. Определим оператор L^2 формулой

$$L^2 = \pounds_{\bar{l}_x}\pounds_{\bar{l}_x} + \pounds_{\bar{l}_y}\pounds_{\bar{l}_y} + \pounds_{\bar{l}_z}\pounds_{\bar{l}_z}. \tag{3.32}$$

Докажите, что $\pounds_{\bar{l}_x}$ и L^2 коммутируют. По симметрии L^2 должно также коммутировать с $\pounds_{\bar{l}_x}$ и $\pounds_{\bar{l}_y}$. Покажите, что для любой скалярной функции f

$$L^2 f = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}, \tag{3.33}$$

где θ и φ — обычные сферические координаты. Таким образом, $L^2 f$ — «угловая часть» оператора $\nabla^2 f$ на единичной сфере.

3.10. ИНВАРИАНТНОСТЬ

С помощью производных Ли можно в удобной форме записать, что́ означает инвариантность тензорного поля относительно тех или иных преобразований, и это один из основных случаев использования производных Ли в физике. А именно, говорят, что тензорное поле $\mathbf{T}$ инвариантно относительно векторного поля $\bar{V}$, если

$$\pounds_{\bar{V}}\mathbf{T} = 0. \tag{3.34}$$

В случае когда $\mathbf{T}$ имеет физический смысл (скажем, является метрическим тензором, или скалярным полем, описывающим потенциальную энергию некоторой частицы, или векторным силовым полем), все те векторные поля (если они