4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Исчисление дифференциальных форм, созданное в начале этого века Э. Картаном, — один из наиболее полезных и плодотворных аналитических методов в дифференциальной геометрии. Перечень понятий, унифицированных и упрощённых благодаря введению этих форм, поразителен: теория интегрирования на многообразиях, векторное произведение, дивергенция и ротор в трехмерной теории поля, определители матриц, ориентируемость многообразий, условия интегрируемости для систем дифференциальных уравнений в частных производных, формула Стокса, формула Гаусса [1] и ещё многое другое. Как и в случае большинства действительно фундаментальных математических и физических понятий, математика дифференциальных форм очень проста. В этой главе мы сначала введём дифференциальные формы в том геометрическом контексте, в котором они возникают наиболее естественным образом, а затем на глазах читателя теория дифференциальных форм (или просто форм) будет постепенно набирать свою силу.

А. АЛГЕБРА И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФОРМ

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЁМА: ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ РОЛЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

До сих пор мы избегали «придавать» нашим многообразиям какую-либо форму или жёсткость. Мы отметили, правда, возможность введения метрических тензоров, но всё наше внимание было сосредоточено на аналитических структурах, которые можно было определять, не прибегая к метрике. Теперь мы обратимся к изучению одного чрезвычайно полезного класса тензоров, а именно тензоров, с помощью которых можно определять элементы объёма на многообразиях.

Рассмотрим объём в двумерном случае, называемый в этом случае площадью. Любая пара (бесконечно малых) векторов

---

[1] В отечественной литературе называемая также формулой Гаусса — Остроградского. — *Прим. ред.*

в эвклидовом пространстве определяет некоторую (бесконечно малую) площадь, а именно площадь, ограниченную параллелограммом, построенным на этих векторах (рис. 4.1). Одна и та же площадь задаётся многими различными парами векторов, которые могут отличаться друг от друга как длиной

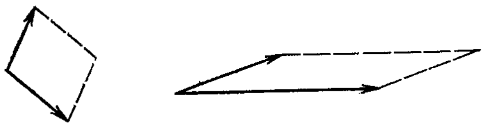

Рис. 4.1. Две пары векторов и определяемые ими площади.

векторов, так и величиной угла между ними (рис. 4.2). Отсюда видно, что площадь — понятие менее жёсткое, чем метрика, ибо эвклидова метрика однозначно определяет и длины векторов, и величину угла, заключённого между ними, а площадь даёт всего лишь одно число, отвечающее двум заданным векторам. Естественно, если метрика есть, то она однозначно определяет и площадь; позже мы покажем, как

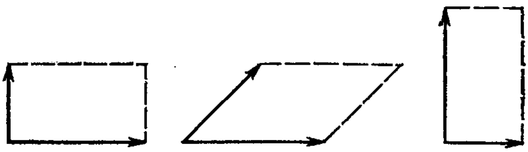

Рис. 4.2. Три пары векторов, определяющие равные площади.

это происходит. Но для определения площади на двумерном многообразии (либо объёма на произвольном многообразии) вовсе не обязательно определять метрику на этом многообразии. В самом деле, многие различные метрики могут определять один и тот же объём.

Предположим, в некоторой точке двумерного многообразия мы имеем два линейно-независимых бесконечно малых вектора. Рассмотрим построенный на них параллелограмм. Мы хотим приписать этой фигуре (малую) площадь, т. е. двум заданным векторам сопоставить некоторое число. Это число должно удваиваться, если будет удвоена длина одного из векторов; кроме того, оно должно обладать свойством аддитивности относительно сложения векторов, т. е. должно выполняться соотношение

$$\text{площадь } (\bar{a}, \bar{b}) + \text{площадь } (\bar{a}, \bar{c}) = \text{площадь } (\bar{a}, \bar{b}+\bar{c}).$$

То что это соотношение выполняется для эвклидова пространства, доказано геометрически на рис. 4.3. На предпоследнем шаге используется тот факт, что площадь параллелограмма останется неизменной, если одну из его сторон сместить на любое расстояние вдоль прямой, которую она определяет. Таким образом, мы доказали, что площадь (,)

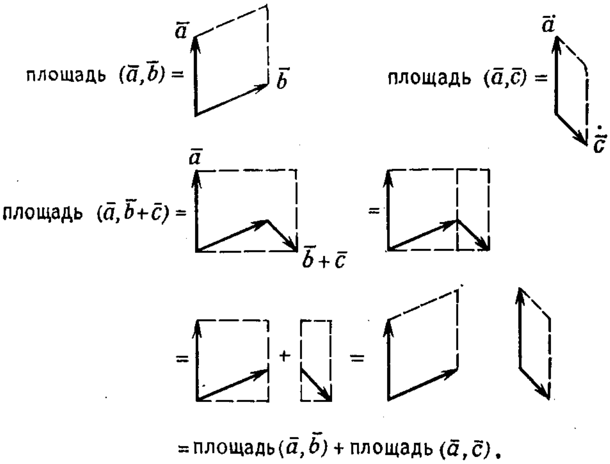

Рис. 4.3. Геометрическое доказательство того факта, что площадь параллелограмма является значением тензора.

билинейна по своим аргументам, т. е. является *тензором.* Поскольку площадь — число, это тензор типа $\binom{0}{2}$. Далее, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны, площадь построенного на них параллелограмма обращается в нуль. Отсюда вытекает, что если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ поменять местами, то наш тензор должен изменить знак; этот факт доказывается в следующем упражнении.

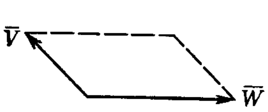

Рис. 4.4. Площадь, определяемая векторами $\bar{V}$ и $\bar{W}$.

Упражнение 4.1. Докажите, что если $\mathbf{B}$ — тензор типа $\binom{0}{2}$, такой что $\mathbf{B}(\bar{V}, \bar{V}) = 0$ для всех $\bar{V}$, то $\mathbf{B}(\bar{U}, \bar{W}) = -\mathbf{B}(\bar{W}, \bar{U})$ для всех $\bar{U}$, $\bar{W}$. (Указание: положите $\bar{V} = \bar{U} + \bar{W}$.) Тензор $\mathbf{B}$ с таким свойством называется *антисимметричным* (или *кососимметричным*) по своим аргументам.

Остановимся на этом поподробнее. На рис. 4.4 изображены два вектора, задающие параллелограмм определённой площади. Эта площадь, выраженная через координаты векторов, как известно, равна (с точностью до знака) следующему определителю:

$$\text{площадь} = \begin{vmatrix} V^x & V^y \\ W^x & W^y \end{vmatrix}.$$

Антисимметричность относительно V и W очевидна.

Обычно в приложениях знак игнорируют и под площадью понимают абсолютное значение указанного выше определителя. Но нам будет удобнее сохранить знак, так как он даёт информацию о том, какую ориентацию, правую или левую, имеет заданная пара векторов. Позже мы будем подробно говорить об этом. Кроме того, мы детально исследуем связь между тензорами объёма и определителями матриц. Но прежде нам надо построить алгебру антисимметричных тензоров. Сначала мы рассмотрим свойства таких тензоров в произвольной фиксированной точке, а затем обобщим полученные результаты на тензорные поля.

4.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ

Напомним ещё раз (см. упр. 4.1) что тензор типа $\binom{0}{2}$ называется антисимметричным, если при перестановке аргументов его знак изменяется, т. е.

$$\tilde{\omega} \text{ антисимметричен} \Leftrightarrow \tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) = -\tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U}) \text{ для всех } \bar{U}, \bar{V}. \tag{4.1}$$

Тензор типа $\binom{0}{p}$, $p \geqslant 3$, называется *антисимметричным*, если при перестановке любых двух своих аргументов он меняет знак. Из всякого тензора можно построить антисимметричный — его так называемую *антисимметричную часть*. Например, если $\tilde{\omega}$ — тензор типа $\binom{0}{2}$, а $\tilde{p}$ — тензор типа $\binom{0}{3}$, то их антисимметричные части задаются формулами

◆ $$\tilde{\omega}_A(\bar{U}, \bar{V}) = \frac{1}{2!}[\tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) - \tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U})], \tag{4.2}$$

◆ $$\tilde{p}_A(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) = \frac{1}{3!}[\tilde{p}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) + \tilde{p}(\bar{V}, \bar{W}, \bar{U}) + \tilde{p}(\bar{W}, \bar{U}, \bar{V}) - \tilde{p}(\bar{V}, \bar{U}, \bar{W}) - \tilde{p}(\bar{W}, \bar{V}, \bar{U}) - \tilde{p}(\bar{U}, \bar{W}, \bar{V})]. \tag{4.3}$$

Общее правило состоит в том, что должны учитываться все перестановки аргументов, причём нечётные перестановки берутся со знаком минус, а чётные — со знаком плюс. Множители 1/2! и 1/3! суть традиционные нормировочные множи-