обозначается просто через *. Нужна, правда, известная бдительность в отношении знаков в случае, если метрика индефинитна (когда, как в теории относительности, некоторые длины положительны, а некоторые отрицательны). В деталях мы обсудим это попозже. Один пример использования такой операции дуальности дан в упр. 5.13.

В алгебре форм часто бывает удобно употреблять антисимметричные *символы Леви-Чивиты*

◆ $$\varepsilon_{ij\ldots k}=\varepsilon^{ij\ldots k}\equiv\begin{cases}+1, & \text{если } ij\ldots k \text{ — четная перестановка чисел } 1, 2, \ldots, n;\\ -1, & \text{если } ij\ldots k \text{ — нечетная перестановка чисел } 1, 2, \ldots, n;\\ 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases} \tag{4.28}$$

Например, форма $\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3$ на трёхмерном многообразии будет иметь компоненты ε_{ijk} в системе координат (x^1, x^2, x^3) и компоненты $h\varepsilon_{ijk}$ в любой другой системе координат, где h — некоторая функция. Предположим, что n-форма объёма $\tilde{\omega}$ имеет компоненты

$$\omega_{ij\ldots k}=f\varepsilon_{ij\ldots k}, \tag{4.29}$$

где f — некоторая функция. Тогда обратный к ней n-вектор имеет компоненты

$$\omega^{ij\ldots k}=\frac{1}{f}\varepsilon^{ij\ldots k}. \tag{4.30}$$

4.10. ТЕНЗОРНЫЕ ПЛОТНОСТИ

Нами принята та точка зрения, что любая ненулевая n-форма на n-мерном многообразии определяет элемент объёма. В реальных задачах подчас встречается сразу несколько таких n-форм. (Примером может служить течение идеальной жидкости, рассматриваемое в гл. 5. На трёхмерном многообразии эвклидова пространства есть три физически существенные три-формы: одна, интеграл от которой задаёт объём области, другая — массу, а третья — некоторую сохраняющуюся величину, связанную с завихрённостью.) Поэтому иногда удобнее соотносить все такие формы с одной *зависящей от выбора системы координат* n-формой $\tilde{d}x^1\wedge\tilde{d}x^2\wedge\ldots\wedge\tilde{d}x^n$, компоненты которой суть просто $\varepsilon_{ij\ldots k}$. Если $\tilde{\omega}$ — рассматриваемая n-форма, то соотношение (4.29), переписанное в виде

$$\omega_{ij\,\dots\,k} = \mathfrak{w}\varepsilon_{ij\,\dots\,k},$$

определяет величину $\mathfrak{w}$, называемую *скалярной плотностью*. Хотя $\mathfrak{w}$ — функция на многообразии, она не является настоящим скаляром, поскольку зависит от выбора координат. При преобразовании координат $x^{i'} = f^i(x^j)$ компоненты $\tilde{\omega}$ умножаются на якобиан J этого преобразования (см. (4.19)), в то время как $\varepsilon_{ij\,\dots\,k}$ *по определению* остаются неизменными. Таким образом, $\mathfrak{w}$ преобразуется по правилу

$$\mathfrak{w}' = J\mathfrak{w}.$$

Это закон преобразования скалярной плотности веса 1. (Термин «вес» будет определён позднее.) Всё это можно обобщить и на тензорные плотности. Предположим, например, что $\mathbf{T}$ — тензор типа $\binom{2}{n}$ на n-мерном многообразии, антисимметричный по своим векторным аргументам:

$$T^{ij}{}_{\underbrace{k\,\dots\,l}_{n \text{ индексов}}} = T^{ij}{}_{[k\,\dots\,l]}.$$

Тогда, после свёртки с двумя один-формами $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, $\mathbf{T}$ задаёт форму объёма $\tilde{t}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$:

$$\tilde{t}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \mathbf{T}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta};\ ,\ \dots,\ ),$$

$$t_{k\,\dots\,l} = T^{ij}{}_{k\,\dots\,l}\alpha_i\beta_j.$$

(Такие тензоры появляются в физике. Например, тензор напряжений, упоминавшийся в гл. 2, определяет плотность напряжений, когда заданы две один-формы; *полное* напряжение есть интеграл от неё по всему объёму, интеграл от свёртки тензора типа $\binom{2}{n}$, полученного умножением тензора напряжений на форму объёма.) Компоненты $\mathbf{T}$ можно представить в виде

$$T^{ij}{}_{k\,\dots\,l} = \mathfrak{T}^{ij}\varepsilon_{k\,\dots\,l},$$

откуда определяются числа $\{\mathfrak{T}^{ij}\}$, являющиеся компонентами тензорной плотности типа $\binom{2}{0}$. (Для обозначения тензорных плотностей общепринято использовать готические буквы.) Законом преобразования для такой плотности будет

$$\mathfrak{T}^{i'j'} = J\Lambda^{i'}{}_k\Lambda^{j'}{}_l\mathfrak{T}^{kl}, \tag{4.31}$$

где J, как и раньше, — якобиан (определитель матрицы $\Lambda^{i'}{}_{j'}$). Это закон преобразования для тензорной плотности типа $\binom{2}{0}$ веса 1.

Термин *вес* указывает, сколько якобианов J в законе преобразования. Например, число $\mathfrak{w}$, преобразующееся по закону

$$\mathfrak{w}' = J^2\mathfrak{w},$$

есть скалярная плотность веса два. Обобщение на тензорные плотности и на другие веса очевидно. Обычные тензоры — это плотности веса нуль. Интерпретация плотностей с весом, отличным от нуля или единицы, довольно сложна, но такие величины действительно оказываются иногда полезными. В этой книге мы не будем работать с плотностями, отдавая предпочтение формам как таковым.

4.11. ОБОБЩЕННЫЕ СИМВОЛЫ КРОНЕКЕРА

У символов Леви-Чивиты есть много полезных и интересных свойств; некоторыми мы воспользуемся в этом и следующем параграфах. Как мы видели раньше, часто приходится сталкиваться с произведениями нескольких ε, такими как $\varepsilon^{ij\dots k}\varepsilon_{il\dots m}$. Возможно развить систематический и удобный способ работы с ними.

Прежде всего заметим, что в двух измерениях для любой ненулевой два-формы $\tilde{\omega}$ мы имеем

$$\omega_{ij}\omega^{kl} = \varepsilon_{ij}\varepsilon^{kl} = \delta^k{}_i\delta^l{}_j - \delta^k{}_j\delta^l{}_i. \tag{4.32}$$

Первое равенство следует из (4.29) и (4.30). Простейший способ установить второе равенство — это заметить, что обе части антисимметричны относительно (k, l) и (i, j); поэтому достаточно рассмотреть случай $i \neq j$, $k \neq l$. С точностью до знака есть только один такой член, а именно $\varepsilon_{12}\varepsilon^{12} = 1$. Легко видеть, что правая часть тоже дает единицу, что и доказывает равенство. Похожая цепь рассуждений приводит нас к ответу в общем случае n измерений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij\dots k}\varepsilon^{lm\dots r} &= \delta^l{}_i\delta^m{}_j\dots\delta^r{}_k - \delta^l{}_j\delta^m{}_i\dots\delta^r{}_k + \dots \\ &= n!\,\delta^l{}_{[i}\delta^m{}_j\dots\delta^r{}_{k]}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Существует сокращённая запись для всего этого. Определим p-дельта-символ как

◆ $$\delta^{i\dots j}_{k\dots l} = p!\,\delta^i{}_{[k}\dots\delta^j{}_{l]}, \tag{4.34}$$

где каждое из множеств $(i \dots j)$ и $(k \dots l)$ содержит по p индексов. В частности,

◆ $$\varepsilon_{ij\dots k}\varepsilon^{lm\dots r} = \delta^{lm\dots r}_{ij\dots k}. \tag{4.35}$$