Термин *вес* указывает, сколько якобианов J в законе преобразования. Например, число $\mathfrak{w}$, преобразующееся по закону

$$\mathfrak{w}' = J^2\mathfrak{w},$$

есть скалярная плотность веса два. Обобщение на тензорные плотности и на другие веса очевидно. Обычные тензоры — это плотности веса нуль. Интерпретация плотностей с весом, отличным от нуля или единицы, довольно сложна, но такие величины действительно оказываются иногда полезными. В этой книге мы не будем работать с плотностями, отдавая предпочтение формам как таковым.

4.11. ОБОБЩЕННЫЕ СИМВОЛЫ КРОНЕКЕРА

У символов Леви-Чивиты есть много полезных и интересных свойств; некоторыми мы воспользуемся в этом и следующем параграфах. Как мы видели раньше, часто приходится сталкиваться с произведениями нескольких ε, такими как $\varepsilon^{ij\,\dots\,k}\varepsilon_{il\,\dots\,m}$. Возможно развить систематический и удобный способ работы с ними.

Прежде всего заметим, что в двух измерениях для любой ненулевой два-формы $\tilde{\omega}$ мы имеем

$$\omega_{ij}\omega^{kl} = \varepsilon_{ij}\varepsilon^{kl} = \delta^k{}_i\delta^l{}_j - \delta^k{}_j\delta^l{}_i. \tag{4.32}$$

Первое равенство следует из (4.29) и (4.30). Простейший способ установить второе равенство — это заметить, что обе части антисимметричны относительно (k, l) и (i, j); поэтому достаточно рассмотреть случай $i \neq j$, $k \neq l$. С точностью до знака есть только один такой член, а именно $\varepsilon_{12}\varepsilon^{12} = 1$. Легко видеть, что правая часть тоже дает единицу, что и доказывает равенство. Похожая цепь рассуждений приводит нас к ответу в общем случае n измерений:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij\,\dots\,k}\varepsilon^{lm\,\dots\,r} &= \delta^l{}_i\delta^m{}_j \dots \delta^r{}_k - \delta^l{}_j\delta^m{}_i \dots \delta^r{}_k + \dots \\ &= n!\, \delta^l{}_{[i}\delta^m{}_j \dots \delta^r{}_{k]}.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Существует сокращённая запись для всего этого. Определим p-дельта-символ как

◆ $$\delta^{i\,\dots\,j}_{k\,\dots\,l} = p!\, \delta^i{}_{[k} \dots \delta^j{}_{l]}, \tag{4.34}$$

где каждое из множеств $(i\ \dots\ j)$ и $(k\ \dots\ l)$ содержит по p индексов. В частности,

◆ $$\varepsilon_{ij\,\dots\,k}\varepsilon^{lm\,\dots\,r} = \delta^{lm\,\dots\,r}_{ij\,\dots\,k}. \tag{4.35}$$

Можно получить p-дельта-символ из $(p+1)$-дельта-символа с помощью свёртки, например по первому индексу. Начнём с

$$\delta^{ijk\ldots l}_{imr\ldots s} = (p+1)!\,\delta^i{}_{[i}\delta^j{}_m\delta^k{}_r \ldots \delta^l{}_{s]}.$$

Члены суммы можно перегруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned}&= p!\,\delta^i{}_i\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r \ldots \delta^l_{s]} - p!\,\delta^i{}_m\delta^j{}_{[i}\delta^k{}_r \ldots \delta^l{}_{s]}\\ &\quad - p!\,\delta^i{}_r\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_i \ldots \delta^l{}_{s]} - \ldots - p!\,\delta^i{}_s\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r \ldots \delta^l{}_{i]}\\ &= p!\,\{n\delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r \ldots \delta^l{}_{s]} - \delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r \ldots \delta^l{}_{s]}\\ &\quad - \delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r \ldots \delta^l{}_{s]} - \ldots - \delta^j{}_{[m}\delta^k{}_r \ldots \delta^l{}_{s]}\},\end{aligned}$$

что даёт

$$◆ \quad \delta^{ij\ldots l}_{im\ldots s} = (n-p)\,\delta^{j\ldots l}_{m\ldots s} \tag{4.36}$$

для один раз свёрнутой $(p+1)$-дельты в n-мерном пространстве.

Упражнение 4.11. (a) Обоснуйте каждый шаг в выводе (4.36).

(b) Получите p-дельту из n-дельты с помощью $n-p$ свёрток:

$$\delta^{\overbrace{r\ldots s}\,\overbrace{i\ldots j}}_{\underbrace{r\ldots s}_{n-p}\,\underbrace{k\ldots l}_{p}} = (n-p)!\,\delta^{i\ldots j}_{k\ldots l}. \tag{4.37}$$

В качестве примера использования этой алгебры вычислим *двойное векторное произведение* в трёхмерном эвклидовом пространстве. В декартовых координатах оператор * выражается через ε, и

$$(\overline{U}\times\overline{V})_i = \varepsilon_{ijk}U^jV^k,$$

поэтому

$$\begin{aligned}[\overline{W}\times(\overline{U}\times\overline{V})]_i &= \varepsilon_{ijk}W^j\varepsilon_{klm}U^lV^m\\ &= \varepsilon_{kij}\varepsilon^{klm}W^jU_lV^m.\end{aligned}$$

Из (4.34) и (4.36) получаем

$$\begin{aligned}[\overline{W}\times(\overline{U}\times\overline{V})]_i &= (\delta^l{}_i\delta^m{}_j - \delta^l{}_j\delta^m{}_i)\,W^jU_lV_m\\ &= U_i(\overline{W}\cdot\overline{V}) - V_i(\overline{W}\cdot\overline{U}).\end{aligned}$$

Вывод настолько прост, что делает совершенно ненужным заучивание формулы двойного векторного произведения.