4.12. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И $\varepsilon_{ij\ldots k}$

Рассмотрим 2×2-матрицу с элементами A^{ij}. Мы покажем, что

$$\det(A) = \varepsilon_{ij}A^{1i}A^{2j}. \tag{4.38}$$

Чтоб в этом убедиться, выпишем явно сумму в правой части:

$$\varepsilon_{ij}A^{1i}A^{2j} = \varepsilon_{12}A^{11}A^{22} + \varepsilon_{21}A^{12}A^{21};$$

мы воспользовались тем, что $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. Кроме того, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$, и мы получаем

$$A^{11}A^{22} - A^{12}A^{21},$$

что по определению и есть определитель нашей матрицы. Следующее упражнение обобщает формулу на случай произвольной матрицы размера $n\times n$.

Упражнение 4.12. (a) Покажите, что определитель $n\times n$-матрицы с элементами A^{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ равен

◆ $$\det(A) = \varepsilon_{ij\ldots k}A^{1i}A^{2j}\ldots A^{nk}. \tag{4.39}$$

(Указание: определитель $n\times n$-матрицы выражается через $(n-1)\times(n-1)$ определители по правилу Лапласа. Используя это правило, докажите (4.39) по индукции, начиная с 2×2-случая.)

(b) Покажите, что

$$\det A = \frac{1}{n!}\varepsilon_{ab\ldots c}\varepsilon_{ij\ldots k}A^{ai}A^{bj}\ldots A^{ck}.$$

Упражнение 4.13. На многообразии с метрикой фиксируем какой-нибудь ортонормированный базис один-форм $\{\tilde{\omega}^i\}$ и определим *выделенную форму объёма* $\tilde{\omega}$ формулой

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^1 \wedge \tilde{\omega}^2 \wedge \ldots \tilde{\omega}^n.$$

Покажите, что в произвольной системе координат $\{x^{k'}\}$

◆ $$\tilde{\omega} = |g|^{1/2}\tilde{d}x^{1'} \wedge \tilde{d}x^{2'} \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^{n'}, \tag{4.40}$$

где g — определитель матрицы, составленной из компонент $g_{i'j'}$ метрического тензора в этих координатах.

Снова интересно рассмотреть случай трёхмерного эвклидова пространства. Объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, равен определителю матрицы, строки которой составлены из компонент этих векторов. Следовательно, в силу (4.39):

$$\text{объём} = \varepsilon_{ijk}a^ib^jc^k = a^i(\varepsilon_{ijk}b^jc^k)$$
$$= a^i(\bar{b}\times\bar{c})_i = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}),$$

ещё одно хорошо известное выражение для объёма.