4.13. МЕТРИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ ОБЪЁМА

В упр. 4.13 наличие метрики на многообразии позволило фиксировать некий ортонормированный базис $\{\tilde{\omega}^i\}$ и с его помощью сконструировать n-форму $\tilde{\omega}$ (см. (4.40)), которую мы назвали «выделенной формой объёма». Насколько эта форма оправдывает название «выделенная»? Однозначно ли она определена или зависит от выбора ортонормированного базиса (который, конечно, можно выбрать не единственным образом), использованного при её построении? Ответ таков: она определена однозначно с точностью до знака. Чтобы в этом убедиться, заметим, что компоненты $\tilde{\omega}$ в исходном базисе по определению равны $\varepsilon_{ij \ldots k}$. Если $\{\tilde{\omega}^{i'}\}$ — какой-то другой ортонормированный базис, то компоненты $\tilde{\omega}$ будут в нём равны $J\varepsilon_{i'j' \ldots k'}$, где J — якобиан преобразования от $\{\tilde{\omega}^j\}$ к $\{\tilde{\omega}^{j'}\}$. Но поскольку оба базиса ортонормированные, то $J = \pm 1$ (это будет доказано ниже). Таким образом, форма $\tilde{\omega}$ отличается от «выделенной» формы, задаваемой базисом $\{\tilde{\omega}^{j'}\}$, не более чем знаком. Если принять какое-либо соглашение об ориентации, то мы сможем определять $\tilde{\omega}$ только через правые ортонормированные базисы, и такое определение будет уже однозначным. Итак, метрика однозначно определяет форму объёма на ориентируемых многообразиях. С интуитивной точки зрения это, конечно, и не удивительно.

Чтобы прийти к этому результату, мы воспользовались тем, что якобиан преобразования от одного ортонормированного базиса к другому (а он есть не что иное, как определитель матрицы перехода $\Lambda^{i'}{}_j$) по модулю равен единице. Это нетрудно установить. Начнём с общего закона преобразования координат метрического тензора

$$g_{i'j'} = \Lambda^k{}_{i'}\Lambda^l{}_{j'}g_{kl},$$

который можно записать в матричном виде так (см. § 2.29):

$$(g') = (\Lambda)^T(g)(\Lambda).$$

Взяв определитель от обеих частей закона преобразования, получаем

$$\det(g') = \det(g)\,[\det(\Lambda)]^2.$$

Но в ортонормированном базисе g_{ij} — это матрица, на диагонали которой стоят ± 1, а в остальных местах — нули. (Напомним, что если g_{ij} — *индефинитная* метрика, то не все диагональные элементы имеют одинаковый знак.) Следовательно, определитель матрицы g_{ij} равен ± 1 и имеет *один и тот же знак* во всех ортонормированных базисах. Таким образом, для нашего якобиана мы имеем

$$\det(\Lambda) = J = \pm 1.$$

В случае индефинитной метрики оператор дуализации * можно определить двумя разными способами; это связано с тем, что для n-вектора $\omega^{ij \cdots k}$, обратного форме объёма, есть два «естественных» определения, отличающихся знаком. Раньше мы стояли на той точке зрения, что

$$\omega^{ij \cdots k}\omega_{ij \ldots k} = n!,$$

т. е.

$$\omega^{12 \cdots n} = (\omega_{12 \ldots n})^{-1}.$$

Но если имеется метрика, то можно определить n-вектор $\tilde{\omega}'$ и поднимая индексы у $\tilde{\omega}$:

$$(\tilde{\omega}')^{ij \ldots k} = g^{il}g^{jm} \ldots g^{kr}\omega_{lm \ldots r},$$

Из (4.39) и (4.40) следует, что

$$(\tilde{\omega}')^{ij \ldots k} = |g|^{1/2} \det(g^{lm})\, \varepsilon^{ij \ldots k}.$$

Теперь, поскольку (g^{lm}) — матрица, обратная к g_{ij}, её определитель равен g^{-1}, и мы имеем

$$(\tilde{\omega}')^{12 \ldots n} = \frac{|g|^{1/2}}{g}, \tag{4.41}$$

тогда как раньше мы имели

$$(\tilde{\omega})^{12 \ldots n} = \frac{1}{(\tilde{\omega})_{12 \ldots n}} = \frac{1}{|g|^{1/2}}. \tag{4.42}$$

Если g отрицателен, то эти формулы отличаются знаком. В теории относительности, где g как раз отрицателен, принято использовать $\tilde{\omega}'$ в соотношениях дуальности. Это вводит дополнительный знак минус в формулы типа (4.27).

В. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФОРМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Где есть интегральное исчисление, должно быть и дифференциальное, и мы сейчас введём так называемое «внешнее дифференцирование», которое действует на формы и превращает их в формы же — их «внешние производные». Точный смысл утверждения, что внешнее дифференцирование обратно к интегрированию, содержится в доказываемой ниже теореме Стокса, обобщающей основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b df = f(b) - f(a). \tag{4.43}$$