В случае индефинитной метрики оператор дуализации * можно определить двумя разными способами; это связано с тем, что для n-вектора $\omega^{ij \dots k}$, обратного форме объёма, есть два «естественных» определения, отличающихся знаком. Раньше мы стояли на той точке зрения, что

$$\omega^{ij \dots k}\omega_{ij \dots k} = n!,$$

т. е.

$$\omega^{12 \dots n} = (\omega_{12 \dots n})^{-1}.$$

Но если имеется метрика, то можно определить n-вектор $\tilde{\omega}'$ и поднимая индексы у $\tilde{\omega}$:

$$(\tilde{\omega}')^{ij \dots k} = g^{il} g^{jm} \dots g^{kr} \omega_{lm \dots r},$$

Из (4.39) и (4.40) следует, что

$$(\tilde{\omega}')^{ij \dots k} = |g|^{1/2} \det(g^{lm}) \varepsilon^{ij \dots k}.$$

Теперь, поскольку (g^{lm}) — матрица, обратная к g_{ij}, её определитель равен g^{-1}, и мы имеем

$$(\tilde{\omega}')^{12 \dots n} = \frac{|g|^{1/2}}{g}, \tag{4.41}$$

тогда как раньше мы имели

$$(\tilde{\omega})^{12 \dots n} = \frac{1}{(\tilde{\omega})_{12 \dots n}} = \frac{1}{|g|^{1/2}}. \tag{4.42}$$

Если g отрицателен, то эти формулы отличаются знаком. В теории относительности, где g как раз отрицателен, принято использовать $\tilde{\omega}'$ в соотношениях дуальности. Это вводит дополнительный знак минус в формулы типа (4.27).

В. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФОРМ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Где есть интегральное исчисление, должно быть и дифференциальное, и мы сейчас введём так называемое «внешнее дифференцирование», которое действует на формы и превращает их в формы же — их «внешние производные». Точный смысл утверждения, что внешнее дифференцирование обратно к интегрированию, содержится в доказываемой ниже теореме Стокса, обобщающей основную формулу интегрального исчисления

$$\int_a^b df = f(b) - f(a). \tag{4.43}$$

Потом мы продвинемся дальше и продемонстрируем тесную связь между дифференциальными формами и уравнениями в частных производных.

4.14. ВНЕШНЯЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Мы хотим определить дифференциальный оператор на формах, который бы сохранял их свойства как форм и был обратным к операции интегрирования в смысле формулы (4.43). Заметим, что если M — одномерное многообразие, то оператор $\tilde{d}$, превращающий нуль-форму f в один-форму $\tilde{d}f$, конечно же, удовлетворяет (4.43). Итак, нам требуется расширить $\tilde{d}$ на формы старших степеней. По аналогии с оператором $\tilde{d}$ на нуль-формах он должен повышать степень формы. Таким образом, если $\tilde{\alpha}$ — p-форма, то $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ должна быть $(p+1)$-формой. Подходящий способ расширения $\tilde{d}$ заключается в следующем (ниже $\tilde{\alpha}$ — p-форма, а $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — q-формы):

◆ (i) $\tilde{d}(\tilde{\beta}+\tilde{\gamma})=(\tilde{d}\tilde{\beta})+(\tilde{d}\tilde{\gamma})$,

◆ (ii) $\tilde{d}(\tilde{\alpha}\wedge\tilde{\beta})=(\tilde{d}\tilde{\alpha})\wedge\tilde{\beta}+(-1)^p\tilde{\alpha}\wedge\tilde{d}\tilde{\beta}$,

◆ (iii) $\tilde{d}(\tilde{d}\tilde{\alpha})=0$.

Свойство (ii) — это не что иное, как правило Лейбница, если отвлечься от множителя $(-1)^p$. Этот множитель возникает потому, что прежде чем подействовать оператором $\tilde{d}$ на $\tilde{\beta}$, его надо «пронести» через p-форму $\tilde{\alpha}$; это означает «перестановку» его с p один-формами, а каждая перестановка дает множитель -1. Это свойство гарантирует, что действие $\tilde{d}$ будет согласовано с законом (4.12). (Дифференцирование, удовлетворяющее условию (ii), называется *антидифференцированием*.) Свойство (iii) на первый взгляд несколько неожиданно, однако если посмотреть, что́ оно значит в случае, когда $\tilde{\alpha}$ есть просто функция f, то станет очевидной его «разумность». Один-форма $\tilde{d}f$ имеет компоненты $\partial f/\partial x^i$; компоненты второй производной должны быть линейными комбинациями $\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j$. Но чтобы образовать два-форму, эти вторые производные должны быть антисимметричны по i и j, в то время как $\partial^2 f/\partial x^i\partial x^j$ симметричны (частные производные коммутируют); поэтому появление нуля совершенно естественно. Свойства (i)—(iii) вместе с определением действия $\tilde{d}$ на функции однозначно определяют $\tilde{d}$. (Довольно длинное доказательство этой теоремы можно найти, посмотрев любое стандартное руководство по дифференциальным формам.)

Упражнение 4.14. (а) Покажите, что

$$\tilde{d}(f\tilde{d}g)=\tilde{d}f\wedge\tilde{d}g. \tag{4.44}$$

(b) Используя (a), покажите, что если

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{p!} \alpha_{i \ldots j} \tilde{d}x^i \wedge \ldots \tilde{d}x^j$$

— запись p-формы $\tilde{\alpha}$ в каком-нибудь координатном базисе, то

$$\tilde{d}\tilde{\alpha} = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^k} (\alpha_{i \ldots j}) \tilde{d}x^k \wedge \tilde{d}x^i \wedge \ldots \tilde{d}x^j$$

и, следовательно,

◆ $$(\tilde{d}\tilde{\alpha})_{ki \ldots j} = (p+1) \frac{\partial}{\partial x^{[k}} \alpha_{ij]} \tag{4.45}$$

4.15. ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Начиная с этого момента мы будем перманентно пользоваться частными производными. Для них существуют удобные стандартные обозначения. А именно, для любой функции f на многообразии

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv f_{,i}. \tag{4.46}$$

Заметим, что сама f может быть компонентой тензора, в этом случае запятая ставится после всех индексов:

◆ $$\frac{\partial V^i{}_j}{\partial x^k} \equiv V^i{}_{j,k}. \tag{4.47}$$

Вторые производные дают дополнительный индекс после запятой, дополнительные же запятые не ставятся:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} = f_{,ik}. \tag{4.48}$$

Чтобы определить порядок действия производных, индексы надо читать слева направо (для $\partial/\partial x^k$ правило *обратное*). Особо отметим, что частное дифференцирование компонент *не* есть тензорная операция в смысле определения § 2.27. То есть функции $\{V^i{}_{j,k}\}$ в общем случае не совпадают с функциями

$$\Lambda^i{}_{a'} \Lambda^{b'}{}_j \Lambda^{c'}{}_k V^{a'}{}_{b',c'},$$

полученными преобразованием частных производных, взятых в другой системе координат. (Вспомните обсуждение в § 3.4 вопросов, связанных с определением дифференцирования тензоров на многообразии.) Единственное исключение из этого правила — дифференцирование *скалярной* функции; как мы видели, $f_{,i}$ являются компонентами один-формы $\tilde{d}f$. (Здесь