(b) Используя (a), покажите, что если

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{p!} \alpha_{i \ldots j} \tilde{d}x^i \wedge \ldots \tilde{d}x^j$$

— запись p-формы $\tilde{\alpha}$ в каком-нибудь координатном базисе, то

$$\tilde{d}\tilde{\alpha} = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^k} (\alpha_{i \ldots j}) \tilde{d}x^k \wedge \tilde{d}x^i \wedge \ldots \tilde{d}x^j$$

и, следовательно,

◆ $$(\tilde{d}\tilde{\alpha})_{ki \ldots j} = (p+1) \frac{\partial}{\partial x^{[k}} \alpha_{ij]} \qquad (4.45)$$

4.15. ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Начиная с этого момента мы будем перманентно пользоваться частными производными. Для них существуют удобные стандартные обозначения. А именно, для любой функции f на многообразии

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv f_{,i}. \qquad (4.46)$$

Заметим, что сама f может быть компонентой тензора, в этом случае запятая ставится после всех индексов:

◆ $$\frac{\partial V^i{}_j}{\partial x^k} \equiv V^i{}_{j,k}. \qquad (4.47)$$

Вторые производные дают дополнительный индекс после запятой, дополнительные же запятые не ставятся:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i} = f_{,ik}. \qquad (4.48)$$

Чтобы определить порядок действия производных, индексы надо читать слева направо (для $\partial/\partial x^k$ правило *обратное*). Особо отметим, что частное дифференцирование компонент *не* есть тензорная операция в смысле определения § 2.27. То есть функции $\{V^i{}_{j,k}\}$ в общем случае не совпадают с функциями

$$\Lambda^i{}_{a'} \Lambda^{b'}{}_j \Lambda^{c'}{}_k V^{a'}{}_{b',c'},$$

полученными преобразованием частных производных, взятых в другой системе координат. (Вспомните обсуждение в § 3.4 вопросов, связанных с определением дифференцирования тензоров на многообразии.) Единственное исключение из этого правила — дифференцирование *скалярной* функции; как мы видели, $f_{,i}$ являются компонентами один-формы $\tilde{d}f$. (Здесь стоит вспомнить указанное в § 2.28 различие между *скалярами* и *функциями*.) Пример использования наших новых обозначений даёт скобка Ли:

$$[\bar{U},\ \bar{V}]^i = U^j V^i{}_{,j} - V^j U^i{}_{,j}.$$

Хотя каждое слагаемое в правой части само по себе тензора не образует, их сумма есть тензор. Аналогично частные производные в (4.45) входят в такой комбинации, что тоже преобразуются как тензор.

Упражнение 4.15. Покажите, что при произвольных преобразованиях координат $V^i{}_{,k}$ не преобразуются как тензор, а $[\bar{U},\ \bar{V}]^i$ все-таки преобразуются как вектор.

Учитывая соглашение о том, что индексы производных пишутся после всех других индексов, можно переписать (4.45) в виде

$$(\tilde{d}\tilde{\alpha})_{i\ \dots\ jk} = (-1)^p (p+1)\, \alpha_{[i\ \dots\ j,\ k]}. \tag{4.49}$$

4.16. ХОРОШО ЗНАКОМЫЕ ПРИМЕРЫ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В точности так же, как внешнее умножение «превращалось» в трёхмерном пространстве в векторное произведение, внешнее дифференцирование превращается в ротор. Рассмотрим вектор $\bar{a}$. Внешняя производная ассоциированной с ним один-формы есть

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{a} &= \tilde{d}(a_1\,\tilde{d}x^1 + a_2\,\tilde{d}x^2 + a_3\tilde{d}x^3)\\ &= a_{1,j}\,\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^1 + a_{2,j}\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^2 + a_{3,j}\,\tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^3.\end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^1 = 0$ и то же верно для индексов 2 и 3, то

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{a} = (a_{1,2} - a_{2,1})\,\tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1 + (a_{2,3} - a_{3,2})\,\tilde{d}x^3 \wedge \tilde{d}x^2&\\ + (a_{3,1} - a_{1,3})\,\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^3&.\end{aligned}$$

Ясно, что ротор здесь содержится. Чтобы выделить его как вектор, возьмём дуальную величину:

$$\begin{aligned}{}^*\tilde{d}\tilde{a} &= (a_{1,2} - a_{2,1})\,{}^*(\tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1) + \dots\\ &= (a_{1,2} - a_{2,1})\,\varepsilon^{213}\frac{\partial}{\partial x^3} + \dots\\ &= (a_{2,1} - a_{1,2})\frac{\partial}{\partial x^3} + \dots,\end{aligned}$$

т. е.

$$^*\tilde{d}\tilde{a} = \bar{\nabla} \times \bar{a}. \tag{4.50}$$

Итак, ротор в трёхмерном пространстве есть $^*\tilde{d}$.