стоит вспомнить указанное в § 2.28 различие между *скалярами* и *функциями*.) Пример использования наших новых обозначений даёт скобка Ли:

$$[\bar{U}, \bar{V}]^i = U^j V^i{}_{,j} - V^j U^i{}_{,j}.$$

Хотя каждое слагаемое в правой части само по себе тензора не образует, их сумма есть тензор. Аналогично частные производные в (4.45) входят в такой комбинации, что тоже преобразуются как тензор.

Упражнение 4.15. Покажите, что при произвольных преобразованиях координат $V^i{}_{,k}$ не преобразуются как тензор, а $[\bar{U}, \bar{V}]^i$ все-таки преобразуются как вектор.

Учитывая соглашение о том, что индексы производных пишутся после всех других индексов, можно переписать (4.45) в виде

$$(\tilde{d}\tilde{\alpha})_{i \dots jk} = (-1)^p (p+1)\, \alpha_{[i \dots j, k]}. \tag{4.49}$$

4.16. ХОРОШО ЗНАКОМЫЕ ПРИМЕРЫ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В точности так же, как внешнее умножение «превращалось» в трёхмерном пространстве в векторное произведение, внешнее дифференцирование превращается в ротор. Рассмотрим вектор $\bar{a}$. Внешняя производная ассоциированной с ним один-формы есть

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{a} &= \tilde{d}(a_1\, \tilde{d}x^1 + a_2\, \tilde{d}x^2 + a_3\, \tilde{d}x^3)\\ &= a_{1,j}\, \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^1 + a_{2,j}\, \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^2 + a_{3,j}\, \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^3.\end{aligned}$$

Поскольку $\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^1 = 0$ и то же верно для индексов 2 и 3, то

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{a} = (a_{1,2} - a_{2,1})\, \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1 + (a_{2,3} - a_{3,2})\, \tilde{d}x^3 \wedge \tilde{d}x^2\\ + (a_{3,1} - a_{1,3})\, \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^3.\end{aligned}$$

Ясно, что ротор здесь содержится. Чтобы выделить его как вектор, возьмём дуальную величину:

$$\begin{aligned}{}^*\tilde{d}\tilde{a} &= (a_{1,2} - a_{2,1})\, {}^*(\tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^1) + \dots\\ &= (a_{1,2} - a_{2,1})\, \varepsilon^{213} \frac{\partial}{\partial x^3} + \dots\\ &= (a_{2,1} - a_{1,2}) \frac{\partial}{\partial x^3} + \dots,\end{aligned}$$

т. е.

$${}^*\tilde{d}\tilde{a} = \bar{\nabla} \times \bar{a}. \tag{4.50}$$

Итак, ротор в трёхмерном пространстве есть ${}^*\tilde{d}$.

Не только ротор, но и дивергенция возникает из внешнего дифференцирования. В этом случае соответствующий оператор будет d^*. Возьмём вектор $\bar{a}$ и найдем дуальную ему форму:

$$\begin{aligned}{}^*(\bar{a}) &= {}^*\left(a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + a^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + a^3 \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = a^1\, {}^*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} a^1 \varepsilon_{1jk}\, \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^k + \dots = a^1 (\tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3) + \dots .\end{aligned}$$

Её внешняя производная равна

$$\begin{aligned}\tilde{d}^*\bar{a} &= a^1{}_{,j}\, \tilde{d}x^j \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3 + \dots \\ &= a^1{}_{,1}\, \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3 + \dots \\ &= (a^i{}_{,i})\, \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3. \end{aligned} \tag{4.51}$$

(При переходе от первой строчки ко второй во внешнем произведении «выживает» только член с $j = 1$.) Таким образом, мы показали, что

$$\blacklozenge \quad \tilde{d}^*\bar{a} = (\bar{\nabla} \cdot \bar{a})\, \tilde{\omega}, \tag{4.52}$$

где $\tilde{\omega} = \tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$ — эвклидов элемент объёма в декартовых координатах. В § 4.23 мы обобщим эту формулу для дивергенции на случай произвольных p-векторов на произвольных многообразиях.

Упражнение 4.16. Используя (4.50), (4.52) и свойство (iii) из § 4.14, покажите, что (в трёхмерном эвклидовом векторном анализе) дивергенция ротора и ротор градиента равны нулю.

4.17. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Внешнее дифференцирование, как и формы сами по себе, тесно связано с хорошо известными понятиями дифференциального исчисления. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y). \tag{4.53}$$

Если считать, что (x, y) — координаты на многообразии, то её можно записать в виде

$$f_{,i} = a_i,$$

где $a_x = g$ и $a_y = h$. Это уравнение в свою очередь можно записать в бескоординатной форме

$$\tilde{d}f = \tilde{a}, \tag{4.54}$$