Не только ротор, но и дивергенция возникает из внешнего дифференцирования. В этом случае соответствующий оператор будет d^*. Возьмём вектор $\bar{a}$ и найдем дуальную ему форму:

$$\begin{aligned}{}^*(\bar{a}) &= {}^*\left(a^1\frac{\partial}{\partial x^1} + a^2\frac{\partial}{\partial x^2} + a^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right) = a^1\,{}^*\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) + \ldots \\ &= \frac{1}{2}a^1\varepsilon_{1jk}\,\tilde{\mathrm{d}}x^j \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^k + \ldots = a^1(\tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3) + \ldots .\end{aligned}$$

Её внешняя производная равна

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}^*\bar{a} &= a^1{}_{,j}\,\tilde{\mathrm{d}}x^j \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3 + \ldots \\ &= a^1{}_{,1}\,\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3 + \ldots \\ &= (a^i{}_{,i})\,\widetilde{\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3}.\end{aligned} \tag{4.51}$$

(При переходе от первой строчки ко второй во внешнем произведении «выживает» только член с $j = 1$.) Таким образом, мы показали, что

◆ $$\tilde{\mathrm{d}}^*\bar{a} = (\bar{\nabla}\cdot\bar{a})\,\tilde{\omega}, \tag{4.52}$$

где $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3$ — эвклидов элемент объёма в декартовых координатах. В § 4.23 мы обобщим эту формулу для дивергенции на случай произвольных p-векторов на произвольных многообразиях.

Упражнение 4.16. Используя (4.50), (4.52) и свойство (iii) из § 4.14, покажите, что (в трёхмерном эвклидовом векторном анализе) дивергенция ротора и ротор градиента равны нулю.

4.17. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Внешнее дифференцирование, как и формы сами по себе, тесно связано с хорошо известными понятиями дифференциального исчисления. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y). \tag{4.53}$$

Если считать, что (x, y) — координаты на многообразии, то её можно записать в виде

$$f_{,i} = a_i,$$

где $a_x = g$ и $a_y = h$. Это уравнение в свою очередь можно записать в бескоординатной форме

$$\tilde{\mathrm{d}}f = \tilde{a}, \tag{4.54}$$

где $\tilde{a}$ — один-форма с компонентами g и h. Предположим теперь, что f — решение этого уравнения. Тогда, действуя на обе части оператором $\tilde{\mathrm{d}}$, мы получим

$$\tilde{\mathrm{d}}(\tilde{\mathrm{d}}f) = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{a}.$$

Но левая часть равна нулю в силу свойства (iii) из определения $\tilde{\mathrm{d}}$, и мы видим, что *необходимое* условие существования решения — равенство

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{a} = 0.$$

В компонентах оно имеет вид

$$a_{[i,\, j]} = 0,$$

что на самом деле есть *одно* равенство (у нас два-форма на двумерном многообразии)

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \tag{4.55}$$

Как и следовало ожидать, это — хорошо всем знакомое условие совместности системы. Таким образом, внешнее дифференциальное исчисление даёт нам геометрический вывод этого условия, и, как правило, такой способ вывода благодаря компактности обозначений простейший. То что условия совместности являются и *достаточными* условиями существования решения, гарантируется теоремой Фробениуса в том варианте, в котором она изложена в § 4.26.

4.18. ТОЧНЫЕ ФОРМЫ

По определению внешней производной $\tilde{\mathrm{d}}$ из того, что $\tilde{\alpha} = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}$, следует, что $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = 0$. Естественно задать обратный вопрос: если $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = 0$, то можно ли утверждать, что существует форма $\tilde{\beta}$, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}$? Форма $\tilde{\alpha}$, для которой $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = 0$, называется *замкнутой*; форма $\tilde{\alpha}$, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}$, называется *точной*. Является ли замкнутая форма точной? Мы докажем в § 4.19, что ответ утвердительный в следующем смысле. Рассмотрим окрестность $\mathcal{D}$ точки P, в которой $\tilde{\alpha}$ определена всюду и в которой $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = 0$. Тогда существуют достаточно малая окрестность точки P и всюду в ней определённая форма $\tilde{\beta}$, такие что $\tilde{\alpha} = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta}$. Конечно, $\tilde{\beta}$ определяется не однозначно: $\tilde{\beta} + \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\gamma}$ с произвольной формой $\tilde{\gamma}$ (нужной степени) тоже подходит.

То что замкнутая форма точна, мы можем утверждать только *локально*, глобально это имеет место вовсе не всегда.