где $\tilde{a}$ — один-форма с компонентами g и h. Предположим теперь, что f — решение этого уравнения. Тогда, действуя на обе части оператором $\tilde{d}$, мы получим

$$\tilde{d}(\tilde{d}f) = \tilde{d}\tilde{a}.$$

Но левая часть равна нулю в силу свойства (iii) из определения $\tilde{d}$, и мы видим, что *необходимое* условие существования решения — равенство

$$\tilde{d}\tilde{a} = 0.$$

В компонентах оно имеет вид

$$a_{[i,\,j]} = 0,$$

что на самом деле есть *одно* равенство (у нас два-форма на двумерном многообразии)

$$\frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \tag{4.55}$$

Как и следовало ожидать, это — хорошо всем знакомое условие совместности системы. Таким образом, внешнее дифференциальное исчисление даёт нам геометрический вывод этого условия, и, как правило, такой способ вывода благодаря компактности обозначений простейший. То что условия совместности являются и *достаточными* условиями существования решения, гарантируется теоремой Фробениуса в том варианте, в котором она изложена в § 4.26.

4.18. ТОЧНЫЕ ФОРМЫ

По определению внешней производной $\tilde{d}$ из того, что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$, следует, что $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Естественно задать обратный вопрос: если $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$, то можно ли утверждать, что существует форма $\tilde{\beta}$, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$? Форма $\tilde{\alpha}$, для которой $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$, называется *замкнутой*; форма $\tilde{\alpha}$, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$, называется *точной*. Является ли замкнутая форма точной? Мы докажем в § 4.19, что ответ утвердительный в следующем смысле. Рассмотрим окрестность $\mathscr{D}$ точки P, в которой $\tilde{\alpha}$ определена всюду и в которой $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Тогда существуют достаточно малая окрестность точки P и всюду в ней определённая форма $\tilde{\beta}$, такие что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$. Конечно, $\tilde{\beta}$ определяется не однозначно: $\tilde{\beta} + \tilde{d}\tilde{\gamma}$ с произвольной формой $\tilde{\gamma}$ (нужной степени) тоже подходит.

То что замкнутая форма точна, мы можем утверждать только *локально*, глобально это имеет место вовсе не всегда.

Если дана произвольная область $\mathscr{D}$, в которой $\tilde{\alpha}$ всюду определена и замкнута, то может оказаться невозможным найти одну-единственную форму $\tilde{\beta}$, определённую всюду в $\mathscr{D}$, такую что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$.

Проиллюстрируем это примером в R^2. Рассмотрим кольцо, заключённое между кривыми $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ (рис. 4.7), и введём декартовы координаты x и y с началом координат P, лежащим внутри $\mathscr{C}_2$. Один-форма

$$\tilde{\alpha} = \frac{x\,\tilde{d}y - y\,\tilde{d}x}{x^2 + y^2}$$

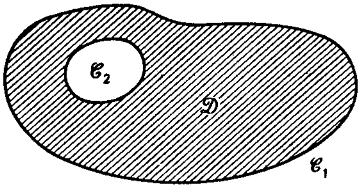

Рис. 4.7. Кольцевая область в R^2. Граничные кривые не входят в область.

определена всюду между кривыми и, как нетрудно убедиться, обладает свойством $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Существует ли функция f, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$? Если мы введём обычные полярные координаты r и θ, то, как легко видеть, $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\theta$, так что на первый взгляд ответ положителен. Однако дело не столь просто: θ не является однозначной непрерывной функцией во всей рассматриваемой области между кривыми $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$. Таким образом, хотя $\tilde{\alpha}$ корректно определена всюду в области, нет такой функции f, для которой всюду $\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$. Локально ответ «да», но глобально — «нет». Вопрос снимается, если мы уберем $\mathscr{C}_2$ и будем рассматривать всю внутренность кривой $\mathscr{C}_1$, поскольку $\tilde{\alpha}$ в точке $x = y = 0$ не определена. Опять-таки, если мы рассмотрим область, изображенную на рис. 4.8, задача решается: в этом случае $\tilde{\alpha}$ определена всюду внутри $\mathscr{C}$ и функцию θ можно выбрать однозначной и непрерывной внутри $\mathscr{C}$. Итак, на этом простом примере мы обнаружили, что, хотя *локально* $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \tilde{d}f$, ответ на *глобальный* вопрос (определена ли f всюду) зависит от рассматриваемой области.

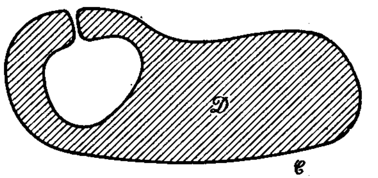

Рис. 4.8. Область в R^2, похожая на область на рис. 4.7, но имеющая границу, которая представляет собой единую связную кривую. Точку скачка θ (в которой θ "прыгает" от 2π до 0) на любом круге $r = \text{const}$ с центром в P можно вынести за пределы области $\mathscr{D}$.

Очевидно, что мы имеем дело с одним из аспектов топологии областей или многообразий. Изучением топологических свойств, которые определяют связь между замкнутыми и точными формами, занимается *теория когомологий.* После доказательства теоремы Стокса мы будем иметь достаточно развитый математический аппарат, который позволит нам дать краткий экскурс в теорию когомологий в § 4.24.

4.19. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛОКАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ЗАМКНУТЫХ ФОРМ

Мы докажем следующую теорему, известную, под названием *леммы Пуанкаре*. Пусть $\tilde{\alpha}$ — замкнутая p-форма, определённая всюду в области U многообразия M, и пусть существует гладкое 1-1-отображение U на открытый шар в R^n, т. е. на внутренность сферы S^{n-1}, задаваемой уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1$. Тогда в U существует $(p-1)$-форма $\tilde{\beta}$, для которой $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$.

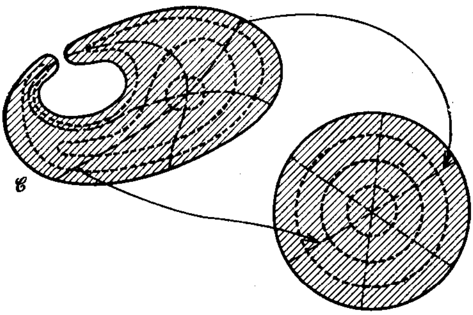

Рис. 4.9. Отображение области на рис. 4.8 на открытый единичный шар в R^2 (внутренность единичного круга). Пунктирные линии переходят в пунктирные, штриховые — в штриховые; показано несколько типичных точек. Если граничная кривая $\mathscr{C}$ — класса C^∞, то и это отображение можно выбрать класса C^∞.

Прежде чем перейти к доказательству, посмотрим, в чём смысл такого отображения. Очевидно, оно означает, что U может быть покрыто единой топологической декартовой системой координат. Это, действительно, — топологическое условие: для области, показанной на рис. 4.7, такой системы нет, а для области на рис. 4.8 — есть, как это показано на рис. 4.9. Такие отображения существуют и для многих других областей. Например, R^n само по себе можно отобразить на его единичный открытый шар по формуле

$$x^i \longmapsto \frac{2}{\pi} x^i \frac{\operatorname{arctg} r}{r}, \tag{4.56}$$

$$r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2]^{1/2}, \tag{4.57}$$

т. е. по формуле

$$r \longmapsto \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} r. \tag{4.58}$$