развитый математический аппарат, который позволит нам дать краткий экскурс в теорию когомологий в § 4.24.

4.19. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛОКАЛЬНОЙ ТОЧНОСТИ ЗАМКНУТЫХ ФОРМ

Мы докажем следующую теорему, известную, под названием *леммы Пуанкаре*. Пусть $\tilde{\alpha}$ — замкнутая p-форма, определённая всюду в области U многообразия M, и пусть существует гладкое 1-1-отображение U на открытый шар в R^n, т. е. на внутренность сферы S^{n-1}, задаваемой уравнением $(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2=1$. Тогда в U существует $(p-1)$-форма $\tilde{\beta}$, для которой $\tilde{\alpha}=\tilde{d}\tilde{\beta}$.

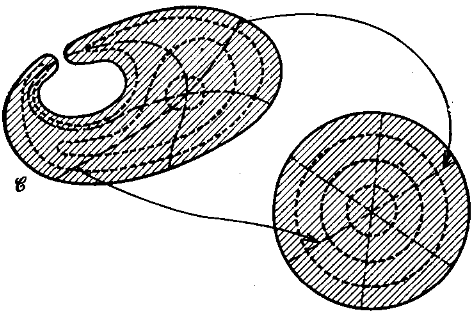

Рис. 4.9. Отображение области на рис. 4.8 на открытый единичный шар в R^2 (внутренность единичного круга). Пунктирные линии переходят в пунктирные, штриховые — в штриховые; показано несколько типичных точек. Если граничная кривая $\mathscr{C}$ — класса C^∞, то и это отображение можно выбрать класса C^∞.

Прежде чем перейти к доказательству, посмотрим, в чём смысл такого отображения. Очевидно, оно означает, что U может быть покрыто единой топологической декартовой системой координат. Это, действительно, — топологическое условие: для области, показанной на рис. 4.7, такой системы нет, а для области на рис. 4.8 — есть, как это показано на рис. 4.9. Такие отображения существуют и для многих других областей. Например, R^n само по себе можно отобразить на его единичный открытый шар по формуле

$$x^i \longmapsto \frac{2}{\pi} x^i \frac{\operatorname{arctg} r}{r}, \tag{4.56}$$

$$r=[(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2]^{1/2}, \tag{4.57}$$

т. е. по формуле

$$r \longmapsto \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} r. \tag{4.58}$$

Это — отображение класса C^∞ даже в начале координат, что можно увидеть, разложив $\operatorname{arctg} r$ в ряд Тэйлора:

$$\operatorname{arctg} r = r - \frac{1}{3} r^3 + \frac{1}{5} r^5 + \ldots .$$

Доказательство теоремы состоит в том, что, используя координаты x^i на U, мы в явном виде построим искомую форму $\tilde{\beta}$. Пусть

$$\tilde{\alpha} = \alpha_{i \ldots k}(x^1, \ldots, x^n)\, \tilde{d}x^i \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k, \tag{4.59}$$

где каждая компонента $\alpha_{i \ldots k}$ имеет p индексов. Свернём $\tilde{\alpha}$ с «радиус-вектором» $\bar{r}$, который в каждой точке имеет компоненты $(x^1, \ldots, x^n)$ относительно координатного базиса, и обозначим полученную $(p-1)$-форму через $\tilde{\mu}$. В силу (4.13) имеем

$$\tilde{\mu} = \tilde{\alpha}(\bar{r}) = \alpha_{ij \ldots k} x^i \tilde{d}x^j \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k. \tag{4.60}$$

Теперь положим

$$\beta_{j \ldots k}(x^1, \ldots, x^n) = \int_0^1 t^{p-1} \alpha_{ij \ldots k}(tx^1, \ldots, tx^n)\, x^i\, dt. \tag{4.61}$$

Интегрирование здесь идет вдоль радиуса, на котором лежит точка $\{x^i\}$. Эти функции определяют $(p-1)$-форму $\tilde{\beta}$:

$$\tilde{\beta} = \beta_{j \ldots k}\, \tilde{d}x^j \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k,$$

и мы утверждаем, что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}\tilde{\beta}$.

Доказательство этого утверждения сводится к простой алгебре. В силу (4.45)

$$(\tilde{d}\tilde{\beta})_{ij \ldots k} = p \frac{\partial}{\partial x^{[i}} \beta_{j \ldots k]} . \tag{4.62}$$

Производная легко берется:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \beta_{j \ldots k} = \int_0^1 t^{p-1} \alpha_{ij \ldots k}(tx^1, \ldots, tx^n)\, dt + \int_0^1 t^p x^l \alpha_{lj \ldots k, i}(tx^1, \ldots, tx^n)\, dt. \tag{4.63}$$

Чтоб это антисимметризовать, воспользуемся (впервые) замкнутостью $\tilde{\alpha}$:

$$0 = \alpha_{[lj \ldots k, i]} =$$

$$\alpha_{l[j \ldots k, i]} - \alpha_{[j|l| \ldots k, i]} - \alpha_{[kj \ldots |l|, i]} - \alpha_{[ij \ldots k], l}, \tag{4.64}$$

где вертикальные черточки отделяют индексы, не участвующие в антисимметризации, требуемой [ ]. Но компоненты $\tilde{\alpha}$ сами по себе антисимметричны по своим индексам, поэтому первые p членов равны между собой и мы заключаем, что

$$0 = p\alpha_{l\,[j\,\ldots\,k,\,i]} - \alpha_{[ij\,\ldots\,k],\,l}. \tag{4.65}$$

Подставляя это во второй интеграл антисимметризованной версии (4.63), а потом всё вместе в (4.62), получаем

$$\begin{aligned}(\tilde{d}\tilde{\beta})_{ij\,\ldots\,k} &= \int_0^1 [pt^{p-1}\alpha_{ij\,\ldots\,k}(tx^1, \ldots, tx^n) \\ &\quad + t^p x^p \alpha_{ij\,\ldots\,k,\,l}(tx^1, \ldots, tx^n)]\,dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[t^p\alpha_{ij\,\ldots\,k}(tx^1, \ldots, tx^n)]\,dt \\ &= \alpha_{ij\,\ldots\,k}(x^1, \ldots, x^n).\end{aligned} \tag{4.66}$$

Это доказывает теорему.

Упражнение 4.17. Докажите равенства (4.64) и (4.65).

Упражнение 4.18. Используя теорему о локальной точности, покажите, что (в трёхмерном эвклидовом векторном анализе) векторное поле с нулевым ротором есть градиент, а векторное поле с нулевой дивергенцией есть ротор.

Тут надо сделать два замечания предостерегающего характера. Первое заключается в том, что, как отмечалось в § 4.18, построенная нами $(p-1)$-форма $\tilde{\beta}$ — не единственная форма, для которой $\tilde{d}\tilde{\beta} = \alpha$. Второе же состоит в том, что мы всего лишь нашли одно достаточное условие точности замкнутой формы. Теория когомологий открывает нам гораздо более сложные многообразия, на которых всякая замкнутая форма оказывается точной (см. § 4.24).

4.20. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ ОТ ФОРМ

Мы выведем следующее удобное выражение для производной Ли p-формы $\tilde{\omega}$ по направлению векторного поля $\bar{V}$:

$$\blacklozenge \quad \pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega} = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{V})] + (\tilde{d}\tilde{\omega})(\bar{V}). \tag{4.67}$$

Таким образом, p-форма $\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ есть сумма двух p-форм: первая — это внешняя производная от $\tilde{\omega}(\bar{V})$ — свёртки $\tilde{\omega}$ и $\bar{V}$; вторая — это свёртка $\tilde{d}\tilde{\omega}$ с $\bar{V}$. Доказательство довольно длинное, и при первом чтении его можно опустить. Ответ (4.67) выглядит вполне естественно: $\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ есть p-форма, зависящая