определителю:

$$\text{площадь} = \begin{vmatrix} V^x & V^y \\ W^x & W^y \end{vmatrix}.$$

Антисимметричность относительно V и W очевидна.

Обычно в приложениях знак игнорируют и под площадью понимают абсолютное значение указанного выше определителя. Но нам будет удобнее сохранить знак, так как он даёт информацию о том, какую ориентацию, правую или левую, имеет заданная пара векторов. Позже мы будем подробно говорить об этом. Кроме того, мы детально исследуем связь между тензорами объёма и определителями матриц. Но прежде нам надо построить алгебру антисимметричных тензоров. Сначала мы рассмотрим свойства таких тензоров в произвольной фиксированной точке, а затем обобщим полученные результаты на тензорные поля.

4.2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, КАСАЮЩИЕСЯ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ ТЕНЗОРОВ

Напомним ещё раз (см. упр. 4.1) что тензор типа $\binom{0}{2}$ называется антисимметричным, если при перестановке аргументов его знак изменяется, т. е.

$$\tilde{\omega} \text{ антисимметричен} \Leftrightarrow \tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) = -\tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U}) \text{ для всех } \bar{U}, \bar{V}. \tag{4.1}$$

Тензор типа $\binom{0}{p}$, $p \geqslant 3$, называется *антисимметричным*, если при перестановке любых двух своих аргументов он меняет знак. Из всякого тензора можно построить антисимметричный — его так называемую *антисимметричную часть*. Например, если $\tilde{\omega}$ — тензор типа $\binom{0}{2}$, а $\tilde{p}$ — тензор типа $\binom{0}{3}$, то их антисимметричные части задаются формулами

◆ $$\tilde{\omega}_A(\bar{U}, \bar{V}) = \frac{1}{2!}[\tilde{\omega}(\bar{U}, \bar{V}) - \tilde{\omega}(\bar{V}, \bar{U})], \tag{4.2}$$

◆ $$\tilde{p}_A(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) = \frac{1}{3!}[\tilde{p}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) + \tilde{p}(\bar{V}, \bar{W}, \bar{U}) + \tilde{p}(\bar{W}, \bar{U}, \bar{V}) - \tilde{p}(\bar{V}, \bar{U}, \bar{W}) - \tilde{p}(\bar{W}, \bar{V}, \bar{U}) - \tilde{p}(\bar{U}, \bar{W}, \bar{V})]. \tag{4.3}$$

Общее правило состоит в том, что должны учитываться все перестановки аргументов, причём нечётные перестановки берутся со знаком минус, а чётные — со знаком плюс. Множители 1/2! и 1/3! суть традиционные нормировочные множители, позволяющие называть $\tilde{\omega}_A$ антисимметричной частью тензора $\tilde{\omega}$ В индексных обозначениях формулы (4.2) и (4.3) перепишутся в виде

$$\blacklozenge \quad (\tilde{\omega}_A)_{ij} = \frac{1}{2!}(\omega_{ij} - \omega_{ji}) \equiv \omega_{[ij]}, \tag{4.4}$$

$$\blacklozenge \quad (\tilde{p}_A)_{ijk} = \frac{1}{3!}(p_{ijk} + p_{jki} + p_{kij} - p_{jik} - p_{kji} - p_{ikj}) \equiv p_{[ijk]}. \tag{4.5}$$

Квадратные скобки $[i \ldots k]$ используются для краткой записи процедуры антисимметризации, включая нормировочный множитель. В дальнейшем мы постоянно будем использовать это обозначение. Буква с волной над ней, например $\tilde{p}$, всегда обозначает антисимметричный тензор. Один-формы, для которых мы уже давно используем обозначение с волной, — «вырожденный» частный случай антисимметричных тензоров, — у них всего один аргумент.

Упражнение 4.2. (a) Докажите, что если компоненты тензора $\tilde{p}$ типа $\binom{0}{N}$ антисимметричны относительно любой пары индексов, то $\tilde{p}$ — антисимметричный тензор.

(b) Пусть $\{A_{ijk}\}$ — компоненты некоторого антисимметричного тензора. Покажите, что

$$A_{ijk} = A_{[ijk]}.$$

(c) Пусть $\mathbf{A}$ — антисимметричный тензор типа $\binom{0}{2}$, а $\mathbf{B}$ — произвольный тензор типа $\binom{2}{0}$. Покажите, что

$$A_{ij}B^{ij} = A_{ij}B^{[ij]},$$

т. е. что в свёртке $\mathbf{A}$ с $\mathbf{B}$ участвует лишь антисимметричная часть тензора $\mathbf{B}$.

(d) Пусть тензор $\mathbf{A}$ тот же, что и в (b), а $\mathbf{B}$ — *симметричный* тензор типа $\binom{2}{0}$, т. е. $\mathbf{B}(\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}) = \mathbf{B}(\tilde{\sigma}, \tilde{\omega})$ для любых один-форм $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\sigma}$. Покажите, что

$$A_{ij}B^{ij} = 0. \tag{4.6}$$

Антисимметричные тензоры обладают следующим важным свойством: антисимметричный тензор типа $\binom{0}{p}$ на n-мерном векторном пространстве ($p \leqslant n$) имеет не более чем

$$C_p^n = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{[1]} \tag{4.7}$$

[1] У нас принято обозначать эту величину через C_n^p. — *Прим. ред.*

независимых компонент. Чтобы доказать это, заметим, что всякая ненулевая компонента нашего тензора определяется p различными числами, выбираемыми из множества $(1, \ldots, n)$. (Числа должны быть попарно различными, ибо при любых двух равных индексах компонента антисимметричного тензора обращается в нуль; ср. с упр. 4.1.) Порядок, в каком выбраны эти p чисел, т. е. порядок индексов компоненты, влияет самое большее на её знак, следовательно, все компоненты, индексы которых являются перестановками заданного множества p чисел, можно считать известными, если известна хотя бы одна из них. Таким образом, число *независимых* компонент равно числу различных наборов из p чисел, выбранных из множества n чисел, а это как раз и есть биномиальный коэффициент, указанный выше.

Упражнение 4.3. Докажите, что если $p > n$, то все компоненты антисимметричного тензора типа $\binom{0}{p}$ на n-мерном векторном пространстве равны нулю.

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Дифференциальная форма степени p, или, короче, *p-форма* $(p \geqslant 2)$, — это, по определению, антисимметричный тензор типа $\binom{0}{p}$. Как уже было определено ранее, один-форма — это тензор типа $\binom{0}{1}$. Скалярные функции называются *нуль-формами.*

Упражнение 4.4. Покажите, что множество всех p-форм фиксированной степени p само является векторным пространством относительно операции сложения, определённой в упр. 2.4. Следовательно, оно является подпространством пространства всех тензоров типа $\binom{0}{p}$. Какова его размерность?

Точно так же, как тензоры типа $\binom{0}{2}$ можно получать из тензоров типа $\binom{0}{1}$ при помощи операции взятия тензорного произведения $\otimes$, так и два-формы можно строить из один-форм при помощи операции $\wedge$ (называемой операцией взятия *внешнего произведения*), которую мы сейчас и определим. Если $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ — один-формы, то их внешнее произведение задаётся формулой

$$\tilde{p} \wedge \tilde{q} \equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p}. \tag{4.8}$$