где вертикальные черточки отделяют индексы, не участвующие в антисимметризации, требуемой [ ]. Но компоненты $\tilde{\alpha}$ сами по себе антисимметричны по своим индексам, поэтому первые p членов равны между собой и мы заключаем, что

$$0 = p\alpha_{l\,[j\,\dots\,k,\,i]} - \alpha_{[ij\,\dots\,k],\,l}. \tag{4.65}$$

Подставляя это во второй интеграл антисимметризованной версии (4.63), а потом всё вместе в (4.62), получаем

$$\begin{aligned}(\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\beta})_{ij\,\dots\,k} &= \int_0^1 [pt^{p-1}\alpha_{ij\,\dots\,k}(tx^1, \dots, tx^n) \\ &\quad + t^p x^p \alpha_{ij\,\dots\,k,\,l}(tx^1, \dots, tx^n)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t^p\alpha_{ij\,\dots\,k}(tx^1, \dots, tx^n)]\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha_{ij\,\dots\,k}(x^1, \dots, x^n).\end{aligned} \tag{4.66}$$

Это доказывает теорему.

Упражнение 4.17. Докажите равенства (4.64) и (4.65).

Упражнение 4.18. Используя теорему о локальной точности, покажите, что (в трёхмерном эвклидовом векторном анализе) векторное поле с нулевым ротором есть градиент, а векторное поле с нулевой дивергенцией есть ротор.

Тут надо сделать два замечания предостерегающего характера. Первое заключается в том, что, как отмечалось в § 4.18, построенная нами $(p-1)$-форма $\tilde{\beta}$ — не единственная форма, для которой $\tilde{d}\tilde{\beta} = \alpha$. Второе же состоит в том, что мы всего лишь нашли одно достаточное условие точности замкнутой формы. Теория когомологий открывает нам гораздо более сложные многообразия, на которых всякая замкнутая форма оказывается точной (см. § 4.24).

4.20. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ ОТ ФОРМ

Мы выведем следующее удобное выражение для производной Ли p-формы $\tilde{\omega}$ по направлению векторного поля $\bar{V}$:

$$\blacklozenge \quad \pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega} = \tilde{d}[\tilde{\omega}(\bar{V})] + (\tilde{d}\tilde{\omega})(\bar{V}). \tag{4.67}$$

Таким образом, p-форма $\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ есть сумма двух p-форм: первая — это внешняя производная от $\tilde{\omega}(\bar{V})$ — свёртки $\tilde{\omega}$ и $\bar{V}$; вторая — это свёртка $\tilde{d}\tilde{\omega}$ с $\bar{V}$. Доказательство довольно длинное, и при первом чтении его можно опустить. Ответ (4.67) выглядит вполне естественно: $\pounds_{\bar{V}}\tilde{\omega}$ есть p-форма, зависящая от $\bar{V}$ и $\tilde{\omega}$, и если вообще можно построить её с помощью $\tilde{d}$ (чего мы вправе ожидать, поскольку обе производные связаны лишь с дифференциальной структурой многообразия), то она должна выражаться через те две единственные p-формы, которые удаётся построить из $\bar{V}$, $\tilde{\omega}$ и $\tilde{d}$. Фактически она оказывается просто их суммой.

Доказательство проводится по индукции. Ради простоты записи не будем писать волны над буквами до конца параграфа.

Первая часть доказательства состоит в рассмотрении случая нуль-формы ω, т. е. функции f. Её свёртка с $\bar{V}$ есть *по определению* нуль, а внешняя производная есть df. Если $\bar{V} = d/d\lambda$, то, как мы знаем, $df(\bar{V}) = df/d\lambda$, но это же равно $\mathcal{L}_{\bar{V}} f = \bar{V}(f) = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\lambda$, что и доказывает формулу в её простейшем случае.

Следующий рассматриваемый случай — один-форма ω. Запишем в компонентах:

$$\begin{aligned}
&\omega(\bar{V}) = \omega_i V^i \Rightarrow \mathrm{d}[\omega(\bar{V})] = (\omega_i V^i)_{,j}\, \mathrm{d}x^j,\\
&\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\omega_i\, \mathrm{d}x^i) = (\mathrm{d}\omega_i) \wedge \mathrm{d}x^i\\
&\quad = \omega_{i,j}\, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i = \omega_{i,j}(\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j)\\
&\Rightarrow (\mathrm{d}\omega)(\bar{V}) = \omega_{i,j}[\mathrm{d}x^j(\bar{V})\, \mathrm{d}x^i - \mathrm{d}x^i(\bar{V})\, dx^j]\\
&\quad = \omega_{i,j} V^j\, \mathrm{d}x^i - \omega_{i,j} V^i\, \mathrm{d}x^j.
\end{aligned}$$

Вместе эти выражения дают

$$d[\omega(\bar{V})] + d\omega(\bar{V}) = [\omega_{i,j} V^j + \omega_j V^j{}_{,i}]\, dx^i,$$

что как раз и есть $\mathcal{L}_{\bar{V}}\omega$ в виде (3.14).

Доказательство завершается выполнением шага индукции по p. Поскольку произвольная p-форма может быть представлена в виде суммы функций, умноженных на внешнее произведение p один-форм:

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i\ldots k}\, \mathrm{d}x^i \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^k,$$

то достаточно доказать теорему для случая форм, имеющих вид

$$\omega = fa \wedge b, \tag{4.68}$$

в предположении, что теорема имеет место для a и b. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\bar{V}}\omega &= (\mathcal{L}_{\bar{V}} f)a \wedge b + f(\mathcal{L}_{\bar{V}} a) \wedge b + fa \wedge (\mathcal{L}_{\bar{V}} b)\\
&= \mathrm{d}f(\bar{V})a \wedge b + f\{\mathrm{d}[a(\bar{V})] + (da)(\bar{V})\} \wedge b\\
&\qquad + fa \wedge \{d[b(\bar{V})] + (\mathrm{d}b)(\bar{V})\}.
\end{aligned}$$

Но кроме того мы знаем, что (если a — p-форма)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\omega(\overline{V})] &= \mathrm{d}[fa(\overline{V}) \wedge b + (-1)^p fa \wedge b(\overline{V})] \\ &= \mathrm{d}f[(a \wedge b)(\overline{V})] + f\{\mathrm{d}[a(\overline{V})] \wedge b + (-1)^{p-1}a(\overline{V}) \\ &\quad \wedge \mathrm{d}b + (-1)^p \mathrm{d}a \wedge b(\overline{V}) + a \wedge [\mathrm{d}b(\overline{V})]\}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(d\omega)(\overline{V}) &= [df \wedge a \wedge b + f\,\mathrm{d}a \wedge b + (-1)^p fa \wedge \mathrm{d}b](\overline{V}) \\ &= df(\overline{V})a \wedge b - \mathrm{d}f \wedge [(a \wedge b)(\overline{V})] + f[\mathrm{d}a(\overline{V}) \wedge b \\ &\quad + (-1)^{p+1}\mathrm{d}a \wedge b(\overline{V}) + (-1)^p a(\overline{V}) \wedge \mathrm{d}b + a \wedge \mathrm{d}b(\overline{V})].\end{aligned}$$

Складывая эти два выражения, мы получаем формулу для $\mathcal{L}_{\overline{V}}\omega$, приведённую выше, что и доказывает правильность (4.67) для форм общего вида.

4.21. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ И ВНЕШНИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ КОММУТИРУЮТ

Важнейшее следствие формулы (4.67) состоит в том, что производные Ли и внешние производные коммутируют (см. (4.69) ниже). Чтоб доказать это, заметим, что для любой формы ω (мы опять опускаем волны)

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}[(\mathrm{d}\omega)(\overline{V})],$$

поскольку $\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = 0$. С другой стороны, формулу для производной Ли можно переписать так:

$$(\mathrm{d}\omega)(\overline{V}) = \mathcal{L}_{\overline{V}}\omega - \mathrm{d}[\omega(\overline{V})].$$

Таким образом (опять потому, что $\mathrm{d}\mathrm{d} = 0$), мы получаем

$$\blacklozenge \quad \mathcal{L}_{\overline{V}}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\mathcal{L}_{\overline{V}}\omega). \tag{4.69}$$

Производная Ли и внешняя производная коммутируют! На самом деле мы столкнулись здесь с частным проявлением фундаментального свойства оператора d (устанавливаемым в более полных курсах), которое заключается в том, что в некотором смысле d коммутирует с любым дифференцируемым отображением многообразия. (Это свойство коммутирования значительно упрощает доказательство предпоследнего утверждения упр. 3.9!)

4.22. ТЕОРЕМА СТОКСА

Теперь мы в состоянии показать, что внешнее дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Поскольку интегрирование на n-мерном многообразии опре-