Но кроме того мы знаем, что (если a — p-форма)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}[\omega(\bar{V})] &= \mathrm{d}[fa(\bar{V}) \wedge b + (-1)^p fa \wedge b(\bar{V})] \\ &= \mathrm{d}f[(a \wedge b)(\bar{V})] + f\{\mathrm{d}[a(\bar{V})] \wedge b + (-1)^{p-1} a(\bar{V}) \\ &\quad \wedge \mathrm{d}b + (-1)^p \mathrm{d}a \wedge b(\bar{V}) + a \wedge [\mathrm{d}b(\bar{V})]\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (d\omega)(\bar{V}) &= [df \wedge a \wedge b + f\,\mathrm{d}a \wedge b + (-1)^p fa \wedge \mathrm{d}b](\bar{V}) \\ &= df(\bar{V})a \wedge b - \mathrm{d}f \wedge [(a \wedge b)(\bar{V})] + f[\mathrm{d}a(\bar{V}) \wedge b \\ &\quad + (-1)^{p+1} \mathrm{d}a \wedge b(\bar{V}) + (-1)^p a(\bar{V}) \wedge \mathrm{d}b + a \wedge \mathrm{d}b(\bar{V})]. \end{aligned}$$

Складывая эти два выражения, мы получаем формулу для $\mathcal{L}_{\bar{V}}\omega$, приведённую выше, что и доказывает правильность (4.67) для форм общего вида.

4.21. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ И ВНЕШНИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ КОММУТИРУЮТ

Важнейшее следствие формулы (4.67) состоит в том, что производные Ли и внешние производные коммутируют (см. (4.69) ниже). Чтоб доказать это, заметим, что для любой формы ω (мы опять опускаем волны)

$$\mathcal{L}_{\bar{V}}\, \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}[(\mathrm{d}\omega)(\bar{V})],$$

поскольку $\mathrm{dd}\omega = 0$. С другой стороны, формулу для производной Ли можно переписать так:

$$(\mathrm{d}\omega)(\bar{V}) = \mathcal{L}_{\bar{V}}\omega - \mathrm{d}[\omega(\bar{V})].$$

Таким образом (опять потому, что $\mathrm{dd} = 0$), мы получаем

◆ $$\mathcal{L}_{\bar{V}}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\mathcal{L}_{\bar{V}}\omega). \tag{4.69}$$

Производная Ли и внешняя производная коммутируют! На самом деле мы столкнулись здесь с частным проявлением фундаментального свойства оператора d (устанавливаемым в более полных курсах), которое заключается в том, что в некотором смысле d коммутирует с любым дифференцируемым отображением многообразия. (Это свойство коммутирования значительно упрощает доказательство предпоследнего утверждения упр. 3.9!)

4.22. ТЕОРЕМА СТОКСА

Теперь мы в состоянии показать, что внешнее дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Поскольку интегрирование на n-мерном многообразии опре-