Но кроме того мы знаем, что (если a — p-форма)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\omega(\overline{V})] &= \mathrm{d}[fa(\overline{V}) \wedge b + (-1)^p fa \wedge b(\overline{V})] \\ &= \mathrm{d}f[(a \wedge b)(\overline{V})] + f\{\mathrm{d}[a(\overline{V})] \wedge b + (-1)^{p-1} a(\overline{V}) \\ &\quad \wedge \mathrm{d}b + (-1)^p \mathrm{d}a \wedge b(\overline{V}) + a \wedge [\mathrm{d}b(\overline{V})]\}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(d\omega)(\overline{V}) &= [df \wedge a \wedge b + f\,\mathrm{d}a \wedge b + (-1)^p fa \wedge \mathrm{d}b](\overline{V}) \\ &= df(\overline{V})a \wedge b - \mathrm{d}f \wedge [(a \wedge b)(\overline{V})] + f[\mathrm{d}a(\overline{V}) \wedge b \\ &\quad + (-1)^{p+1} \mathrm{d}a \wedge b(\overline{V}) + (-1)^p a(\overline{V}) \wedge \mathrm{d}b + a \wedge \mathrm{d}b(\overline{V})].\end{aligned}$$

Складывая эти два выражения, мы получаем формулу для $\mathcal{L}_{\overline{V}}\omega$, приведённую выше, что и доказывает правильность (4.67) для форм общего вида.

4.21. ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ И ВНЕШНИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ КОММУТИРУЮТ

Важнейшее следствие формулы (4.67) состоит в том, что производные Ли и внешние производные коммутируют (см. (4.69) ниже). Чтоб доказать это, заметим, что для любой формы ω (мы опять опускаем волны)

$$\mathcal{L}_{\overline{V}}\,\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\,[(\mathrm{d}\omega)(\overline{V})],$$

поскольку $\mathrm{dd}\omega = 0$. С другой стороны, формулу для производной Ли можно переписать так:

$$(\mathrm{d}\omega)(\overline{V}) = \mathcal{L}_{\overline{V}}\omega - \mathrm{d}\,[\omega(\overline{V})].$$

Таким образом (опять потому, что $\mathrm{dd} = 0$), мы получаем

◆ $$\mathcal{L}_{\overline{V}}(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\mathcal{L}_{\overline{V}}\omega). \tag{4.69}$$

Производная Ли и внешняя производная коммутируют! На самом деле мы столкнулись здесь с частным проявлением фундаментального свойства оператора d (устанавливаемым в более полных курсах), которое заключается в том, что в некотором смысле d коммутирует с любым дифференцируемым отображением многообразия. (Это свойство коммутирования значительно упрощает доказательство предпоследнего утверждения упр. 3.9!)

4.22. ТЕОРЕМА СТОКСА

Теперь мы в состоянии показать, что внешнее дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции. Поскольку интегрирование на n-мерном многообразии определено только для n-форм, то речь может идти лишь о внешних производных $(n-1)$-форм. Далее, поскольку мы ввели лишь *определённые* интегралы от n-форм (т. е. интегралы, значение которых есть число, а не функция), то соотношение, обобщающее формулу (4.43), приведённую в начале части В этой главы, должно связать нам интеграл от n-формы $\tilde{d}\tilde{\omega}$ с другим интегралом — от формы $\tilde{\omega}$. Но $(n-1)$-форму $\tilde{\omega}$ можно проинтегрировать только по $(n-1)$-мерной гиперповерхности, следовательно, искомая формула должна связывать

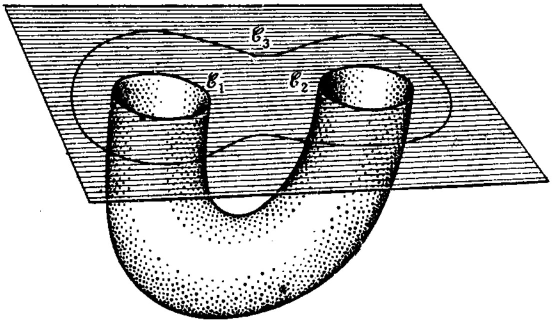

Рис. 4.10. Многообразие с "ручкой". Ни кривая $\mathscr{C}_1$, ни кривая $\mathscr{C}_2$ не являются границами, поскольку они не делят M на две области ("внутри" и "снаружи"). Их объединение $\mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$ есть граница, состоящая из двух не связанных между собой подмногообразий. Кривая $\mathscr{C}_3$ — связная граница.

интеграл от $\tilde{d}\tilde{\omega}$ по некоторой конечной области с интегралом от $\tilde{\omega}$ по *границе* этой области, которая $(n-1)$-мерна. Мы подойдём к теореме Стокса (формула (4.75) ниже) несколько окольным путём, что позволит избежать длинных вычислений, встречающихся в стандартных доказательствах. Сначала исследуем (с точностью до первого порядка), что́ происходит с интегралом при малой вариации области интегрирования.

Итак, рассмотрим интеграл от n-формы $\tilde{\omega}$ по области U n-мерного многообразия M. Пусть U имеет гладкую ориентируемую границу; обозначим её ∂U. Под ориентируемой границей мы подразумеваем $(n-1)$-мерное ориентируемое подмногообразие в M, такое что $M \setminus \partial U$ распадается на два непересекающихся множества U и CU (дополнение U) таким образом, что любая кривая, соединяющая точки из U и CU, обязательно содержит точку из ∂U. Для простоты будем считать ∂U связной, хотя это и не обязательно. Примеры ориентируемых границ приведены на рис. 4.10. Пусть $\bar{\xi}$ — векторное поле на M. Рассмотрим изменение области интегрирования, генерируемое *переносом Ли этой области* (*но не формы* $\tilde{\omega}$)

вдоль $\bar{\xi}$. В результате мы получим семейство областей $U(\varepsilon)$ и границ $\partial U(\varepsilon)$, зависящее от параметра сдвига ε, причём $U = U(0)$ и $\partial U = \partial U(0)$. Это изображено на рис. 4.11.

Изменение интеграла равно просто интегралу от $\tilde{\omega}$ по области $\delta U(\varepsilon)$, заключённой между границами:

$$\int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} - \int_{U(0)} \tilde{\omega} = \int_{\delta U(\varepsilon)} \tilde{\omega}. \tag{4.70}$$

Вычислим его. Пусть V — кусок ∂U с системой координат $\{x^2, x^3, \ldots, x^n\}$. С помощью переноса Ли мы можем ввести

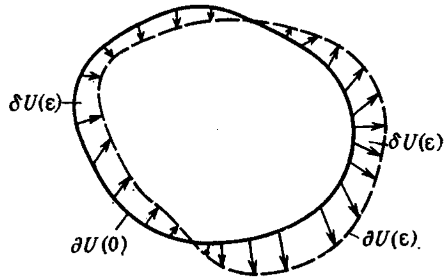

Рис. 4.11. Деформация области $U = U(0)$ в $U(\varepsilon)$ при сдвиге точек многообразия вдоль интегральных кривых поля $\bar{\xi}$ на параметрическое "расстояние" ε. Стрелки изображают векторы $\varepsilon\bar{\xi}$ (для малых ε). Область между ∂U и $\partial U(\varepsilon)$ — это $\delta U(\varepsilon)$.

координаты $\{x^1 = \varepsilon, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ в некоторой окрестности V, если поле $\bar{\xi}$ не является касательным к границе ∂U ни в

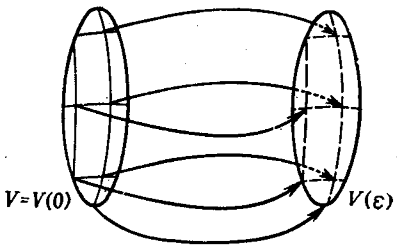

Рис. 4.12. Система координат в окрестности куска V границы ∂U, на котором $\bar{\xi}$ нигде не касается ∂U. Область $\delta V(\varepsilon)$ состоит из тех точек интегральных кривых поля $\bar{\xi}$, проходящих через V, которые удалены от V на параметрическое расстояние $\leqslant \varepsilon$.

одной её точке (см. рис. 4.12). Это задаёт координатную систему в области $\delta V(\varepsilon)$, заключённой между $\partial U(0)$ и $\partial U(\varepsilon)$ «над» $V = V(0)$. Сначала мы вычислим интеграл от $\tilde{\omega}$ по этой области, а потом распространим его на всю область $\delta U(\varepsilon)$.

В выбранных координатах

$$\tilde{\omega} = f(x^1, \ldots, x^n)\, \tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n.$$

Если ε мало, то интеграл равен[1)]

$$\int_{\delta V(\varepsilon)} \tilde{\omega} = \int_{V(0)} \left[\int_0^{\varepsilon} f\, dx^1 \right] dx^2 \ldots dx^n$$

$$= \varepsilon \int_{V(0)} f(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n + o(\varepsilon)$$

$$= \varepsilon \int_V \tilde{\omega}(\bar{\xi}) \Big|_{\partial U} + o(\varepsilon). \tag{4.71}$$

Последняя строчка следует из (4.13) и того, что $\partial/\partial x^1 = \bar{\xi}$.

Равенство (4.71) не зависит от построенной системы координат, важно лишь, чтобы поле $\bar{\xi}$ не было касательным к ∂U на V. Таким образом, оно очевидно применимо к любой части ∂U, заключенной между точками, в которых $\bar{\xi}$ касательно к ∂U. Если эти точки образуют подмногообразие ∂U меньшей размерности (как на рис. 4.11), тогда вопросов не возникает: они как раз разделят ∂U на области $V_{(i)}$, в каждой из которых (4.71) выполняется. Если же точки касания $\bar{\xi}$ к ∂U образуют открытую область в ∂U, тогда перенос Ли просто отображает эту область в себя и вообще не меняет значения интеграла, следовательно, (4.71) опять-таки выполняется, так как обе части равны нулю. Итак, мы можем применить (4.71) ко всей границе ∂U, что даёт вместе с (4.70)

$$\blacklozenge \quad \frac{d}{d\varepsilon} \int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} - \int_{U(0)} \tilde{\omega} \right] = \int_{\partial U} \tilde{\omega}(\bar{\xi}) \Big|_{\partial U}. \tag{4.72}$$

Но для $(d/d\varepsilon)\int \tilde{\omega}$ можно получить и другое выражение, следующее прямо из определения переноса Ли области по направлению $\bar{\xi}$. В каждой сдвинутой точке подынтегральное выражение отличается от исходного на $\varepsilon \mathcal{L}_{\bar{\xi}} \tilde{\omega} + o(\varepsilon)$, и, следовательно,

$$\blacklozenge \quad \frac{d}{d\varepsilon} \int_{U(\varepsilon)} \tilde{\omega} = \int_{U(0)} \mathcal{L}_{\bar{\xi}} \tilde{\omega}. \tag{4.73}$$

Но в нашем случае формула (4.67) для $\mathcal{L}_{\bar{\xi}} \tilde{\omega}$ значительно упрощается, поскольку $d\tilde{\omega}$ есть $(n+1)$-форма и, значит, тож-

1) Символ $o(\varepsilon)$ обозначает любую функцию $g(\varepsilon)$, такую что $g(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

дественно равна нулю:

$$\int_U \pounds_{\bar\xi}\tilde\omega = \int_U \tilde d\,[\tilde\omega(\bar\xi)].$$

Сравнивая эту формулу с предыдущим выражением для $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varepsilon)\int_U \tilde\omega$, мы получаем *теорему о дивергенции* (причина такого названия станет понятной в следующем параграфе):

$$◆\quad \int_U \tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde\omega(\bar\xi)] = \int_{\partial U} \tilde\omega(\bar\xi)\,\Big|_{\partial U}. \tag{4.74}$$

Поскольку $\tilde\omega$ и $\bar\xi$ произвольны, то $\tilde\omega(\bar\xi)$ — произвольная $(n-1)$-форма, и мы можем переписать (4.74) в виде *теоремы Стокса* для произвольной $(n-1)$-формы $\tilde\alpha$, определённой на M:

$$◆\quad \int_U \tilde{\mathrm{d}}\tilde\alpha = \int_{\partial U} \tilde\alpha, \tag{4.75}$$

где в правой части стоит, конечно же, ограничение $\tilde\alpha$ на ∂U.

То, что это та самая формула, которая называется в эвклидовом векторном исчислении формулой Стокса, легко увидеть, если взять M двумерным, как на рис. 4.11. Тогда $\tilde\alpha$ будет один-формой: $\tilde\alpha = \alpha_i \mathrm{d}x^i$ и $\tilde{\mathrm{d}}\tilde\alpha = (\alpha_{i,\,j} - \alpha_{j,\,i})\,\tilde{\mathrm{d}}x^j \otimes \tilde{\mathrm{d}}x^i$. Ограничить $\tilde\alpha$ на ∂U — это значит рассматривать её значения лишь на касательных к ∂U векторах $\bar l = \bar d/\mathrm{d}\lambda$. Поэтому мы получаем

$$\int (\alpha_{1,\,2} - \alpha_{2,\,1})\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 = \oint_{\partial U} \alpha_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \oint_{\partial U} \alpha_i\,\mathrm{d}x^i.$$

Но это и есть стандартная формула Стокса.

4.23. ТЕОРЕМА ГАУССА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ

В теореме Стокса содержится и то, что в векторном исчислении известно под именем теоремы Гаусса. Действительно, вернёмся к формуле (4.74) и рассмотрим координаты в некоторой области W многообразия M, в которых $\tilde\omega = \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n$. Тогда её свёртка с $\bar\xi$ равна

$$\tilde\omega(\bar\xi) = \xi^1 \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n - \xi^2 \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3 \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n \pm \ldots \tag{4.76}$$

и

$$\tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde\omega(\bar\xi)] = \xi^1{}_{,1}\,\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n + \xi^2{}_{,2}\,\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n + \ldots = \xi^i{}_{,i}\tilde\omega.$$