дественно равна нулю:

$$\int_U \pounds_{\bar{\xi}}\tilde{\omega} = \int_U \tilde{d}\,[\tilde{\omega}(\bar{\xi})].$$

Сравнивая эту формулу с предыдущим выражением для $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varepsilon)\int_U \tilde{\omega}$, мы получаем *теорему о дивергенции* (причина такого названия станет понятной в следующем параграфе):

$$\blacklozenge \quad \int_U \tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde{\omega}(\bar{\xi})] = \int_{\partial U} \tilde{\omega}(\bar{\xi})\,\Big|_{\partial U}. \tag{4.74}$$

Поскольку $\tilde{\omega}$ и $\bar{\xi}$ произвольны, то $\tilde{\omega}(\bar{\xi})$ — произвольная $(n-1)$-форма, и мы можем переписать (4.74) в виде *теоремы Стокса* для произвольной $(n-1)$-формы $\tilde{\alpha}$, определённой на M:

$$\blacklozenge \quad \int_U \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = \int_{\partial U} \tilde{\alpha}, \tag{4.75}$$

где в правой части стоит, конечно же, ограничение $\tilde{\alpha}$ на ∂U.

То, что это та самая формула, которая называется в эвклидовом векторном исчислении формулой Стокса, легко увидеть, если взять M двумерным, как на рис. 4.11. Тогда $\tilde{\alpha}$ будет один-формой: $\tilde{\alpha} = \alpha_i \mathrm{d}x^i$ и $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\alpha} = (\alpha_{i,j} - \alpha_{j,i})\,\tilde{\mathrm{d}}x^j \otimes \tilde{\mathrm{d}}x^i$. Ограничить $\tilde{\alpha}$ на ∂U — это значит рассматривать её значения лишь на касательных к ∂U векторах $\bar{l} = d/\mathrm{d}\lambda$. Поэтому мы получаем

$$\int (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,1})\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2 = \oint_{\partial U} \alpha_i \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda = \oint_{\partial U} \alpha_i\,\mathrm{d}x^i.$$

Но это и есть стандартная формула Стокса.

4.23. ТЕОРЕМА ГАУССА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИВЕРГЕНЦИИ

В теореме Стокса содержится и то, что в векторном исчислении известно под именем теоремы Гаусса. Действительно, вернёмся к формуле (4.74) и рассмотрим координаты в некоторой области W многообразия M, в которых $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n$. Тогда её свёртка с $\bar{\xi}$ равна

$$\tilde{\omega}(\bar{\xi}) = \xi^1 \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n - \xi^2 \tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^3 \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n \pm \ldots \tag{4.76}$$

и

$$\tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde{\omega}(\bar{\xi})] = \xi^1{}_{,1}\,\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n + \xi^2{}_{,2}\,\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^n + \ldots = \xi^i{}_{,i}\,\tilde{\omega}.$$

По аналогии с эвклидовой геометрией определим $\tilde{\omega}$-*дивергенцию* векторного поля $\bar{\xi}$ формулой

◆ $$(\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\,\bar{\xi})\,\tilde{\omega} \equiv \tilde{\mathrm{d}}\,[\tilde{\omega}\,(\bar{\xi})]. \tag{4.77}$$

Если на области V, определённой в § 4.22, мы опять введем координаты, в которых ∂U есть поверхность постоянного x^1, то *ограничение* $\tilde{\omega}\,(\bar{\xi})$ на ∂U будет опять равно

$$\tilde{\omega}\,(\bar{\xi})\,|_{\partial U} = \xi^1 \tilde{\mathrm{d}}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n = \tilde{\mathrm{d}}x^1\,(\bar{\xi})\,\tilde{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n.$$

Более общо, если $\tilde{n}$ — один-форма, нормальная к ∂U, т. е. $\tilde{n}\,(\bar{\eta}) = 0$ на любом касательном к ∂U векторе (η), и если $\tilde{\alpha}$ — произвольная $(n-1)$-форма, такая что

$$\tilde{\omega} = \tilde{n} \wedge \tilde{\alpha},$$

то мы получаем $\tilde{\omega}(\bar{\xi})\,|_{\partial U} = \tilde{n}\,(\bar{\xi})\,\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$. Это позволяет записать (4.74) в виде

◆ $$\int_U (\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\,\bar{\xi})\,\tilde{\omega} = \int_{\partial U} \tilde{n}\,(\bar{\xi})\,\tilde{\alpha}, \tag{4.78}$$

где $\tilde{\alpha}$ ограничена на ∂U и $\tilde{n} \wedge \tilde{\alpha} = \tilde{\omega}$. Если всё U покрыто системой координат, в которой имеет место (4.76), то мы можем записать

$$\int_U \xi^i{}_{,i}\,\mathrm{d}^n x = \oint_{\partial U} \xi^i n_i\,\mathrm{d}^{n-1}x, \tag{4.79}$$

а это и есть стандартная запись теоремы Гаусса в R^n.

Упражнение 4.19. Покажите, что хотя сама форма $\tilde{\alpha}$ определяется формулой (4.78) неоднозначно, её ограничение $\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$ определено уже однозначно при фиксированной форме $\tilde{n}$. Покажите, далее, что $\tilde{n}$ единственна с точностью до преобразования изменения масштаба $\tilde{n} \mapsto f\tilde{n}$, где f — произвольная, нигде не обращающаяся в нуль функция, и, следовательно, $\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$ определено однозначно с точностью до преобразования $\tilde{\alpha}\,|_{\partial U} \mapsto f^{-1}\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$. Выведите отсюда, что ограничение $\tilde{n}\,(\bar{\xi})\,\tilde{\alpha}\,|_{\partial U}$ определено *однозначно*.

Произвол в определении дивергенции $\bar{\xi}$, связанный с выбором формы $\tilde{\omega}$, можно устранить, если имеется метрика, — мы можем использовать тогда в качестве $\tilde{\omega}$ метрический элемент объёма (§ 4.13). Он, правда, определён лишь с точностью до знака, но из (4.77) видно, что на самом деле $\mathrm{div}_{\tilde{\omega}}\,\bar{\xi}$ от этого знака не зависит. Из (4.79) следует, что стандартная дивергенция в R^n строится на основе формы $\tilde{\mathrm{d}}x^1 \wedge \ldots$

$\ldots \wedge \tilde{d}x^n$, являющейся элементом объёма в эвклидовой метрике.

Упражнение 4.20. С помощью (4.77) покажите, что если выбраны координаты, в которых $\tilde{\omega} = f\,\tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n$, то

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{\xi} = \frac{1}{f} (f\xi^i)_{,i}. \tag{4.80}$$

Упражнение 4.21. Рассмотрим в трёхмерном эвклидовом пространстве выделенную три-форму объёма $\tilde{\omega} = \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z$. Покажите, что в полярных координатах она имеет вид $\tilde{\omega} = r^2 \sin\theta \tilde{d}r \wedge \tilde{d}\theta \wedge \tilde{d}\varphi$. Используя (4.80), покажите, что дивергенция вектора $\bar{\xi} = \xi^r \partial/\partial r + \xi^\theta \partial/\partial\theta + \xi^\varphi \partial/\partial\varphi$ равна

$$\operatorname{div} \bar{\xi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi^r) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta\,\xi^\theta) + \frac{\partial \xi^\varphi}{\partial\varphi}.$$

Упражнение 4.22. В гидродинамике (и во многих других областях физики) используется уравнение неразрывности, которое на языке обычного тензорного исчисления записывается как

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0.$$

Здесь ρ — плотность массы (или другой сохраняющейся величины), а $\bar{V}$ — скорость потока. Определив $\tilde{\omega} = \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z$, как в упр. 4.21, и используя оператор *полной производной по времени* $\partial/\partial t + \pounds_{\bar{V}}$ (он подробно обсуждается ниже в гл. 5), покажите, что уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right)(\rho\tilde{\omega}) = 0.$$

Это позволяет смотреть на $\rho\tilde{\omega}$ как на динамически сохраняющуюся три-форму объёма в жидкости. «Объём», который она приписывает каждому элементу жидкости, есть его масса.

Упражнение 4.23. (а) С помощью (4.77) покажите, что дивергенция вектора $\bar{\xi}$ может быть записана как

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \bar{\xi} = {}^*\mathrm{d}^*\bar{\xi}, \tag{4.81}$$

где * обозначает введённый ранее оператор дуализации относительно $\tilde{\omega}$.

(b) Для любого p-вектора $\mathbf{F}$ положим

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}} \mathbf{F} = (-1)^{n(p-1)*}\mathrm{d}^*\mathbf{F}. \tag{4.82}$$

Покажите, что $\operatorname{div}_{\tilde\omega}\mathbf{F}$ есть $(p-1)$-вектор. Покажите, что если в некоторой системе координат $\tilde\omega$ имеет компоненты $\varepsilon_{i\ldots l}$, то

$$(\operatorname{div}_{\tilde\omega}\mathbf{F})^{i\ldots l}=\mathbf{F}^{ki\ldots l}{}_{,k} \qquad (4.83)$$

в этой системе координат.

(c) Обобщите (4.80) на p-векторы.

Упражнение 4.24. (a) Используя теорему Стокса, докажите, что два-форма $\tilde\omega$ на сфере S^2 точна (т. е. является внешней производной другой формы) только тогда, когда

$$\int_{S^2}\tilde\omega=0.$$

(Указание: S^2 не имеет границы.)

(b) Покажите, что интеграл от заданной в R^3 два-формы

$$\tilde\omega=x^1\tilde{d}x^2\wedge\tilde{d}x^3$$

по единичной сфере S^2 равен

$$\int_{S^2}\tilde\omega\Big|_{S^2}=\frac{4}{3}\pi.$$

(Указание: что такое $\tilde{d}\tilde\omega$ в R^3?) Поскольку любая два-форма на S^2 замкнута (почему?), это доказывает, что не всякая замкнутая форма на S^2 точна.

(c) Покажите, что любая замкнутая один-форма $\tilde\beta$ на S^2 точна. (Указание: проинтегрируйте $\tilde{d}\tilde\beta$ по части S^2.)

4.24. КРАТКИЙ ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ КОГОМОЛОГИЙ

Приведённое выше упр. 4.24 показывает, как можно использовать теорему Стокса для изучения тех глобальных свойств многообразия, которые определяют соотношение между замкнутыми и точными формами. Обозначим через $Z^p(M)$ множество всех замкнутых p-форм на M (всех $\tilde\alpha$, таких что $\tilde{d}\tilde\alpha=0$) и через $B^p(M)$ множество всех точных p-форм на M (всех $\tilde\alpha$, таких, что $\tilde\alpha=\tilde{d}\tilde\beta$). Оба эти множества являются векторными пространствами над полем вещественных чисел (например, если $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ — замкнутые p-формы, то $a\tilde\alpha+b\tilde\beta$ тоже замкнута для любых вещественных чисел a и b). Кроме того, B^p — подпространство в Z^p, так как $\tilde{d}\tilde{d}\tilde\beta=0$. Покажем, как можно разбить $Z^p(M)$ на классы эквивалентности относи-