Покажите, что $\mathrm{div}_{\tilde\omega}\mathbf{F}$ есть $(p-1)$-вектор. Покажите, что если в некоторой системе координат $\tilde\omega$ имеет компоненты $\varepsilon_{i\ldots j}$, то

$$(\mathrm{div}_{\tilde\omega}\mathbf{F})^{i\ldots j} = \mathbf{F}^{ki\ldots j}{}_{,k} \tag{4.83}$$

в этой системе координат.

(c) Обобщите (4.80) на p-векторы.

Упражнение 4.24. (a) Используя теорему Стокса, докажите, что два-форма $\tilde\omega$ на сфере S^2 точна (т. е. является внешней производной другой формы) только тогда, когда

$$\int_{S^2} \tilde\omega = 0.$$

(Указание: S^2 не имеет границы.)

(b) Покажите, что интеграл от заданной в R^3 два-формы

$$\tilde\omega = x^1 \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$$

по единичной сфере S^2 равен

$$\int_{S^2} \tilde\omega \Big|_{S^2} = \frac{4}{3}\pi.$$

(Указание: что такое $\tilde{d}\tilde\omega$ в R^3?) Поскольку любая два-форма на S^2 замкнута (почему?), это доказывает, что не всякая замкнутая форма на S^2 точна.

(c) Покажите, что любая замкнутая один-форма $\tilde\beta$ на S^2 точна. (Указание: проинтегрируйте $\tilde{d}\tilde\beta$ по части S^2.)

4.24. КРАТКИЙ ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ КОГОМОЛОГИЙ

Приведённое выше упр. 4.24 показывает, как можно использовать теорему Стокса для изучения тех глобальных свойств многообразия, которые определяют соотношение между замкнутыми и точными формами. Обозначим через $Z^p(M)$ множество всех замкнутых p-форм на M (всех $\tilde\alpha$, таких что $\tilde{d}\tilde\alpha = 0$) и через $B^p(M)$ множество всех точных p-форм на M (всех $\tilde\alpha$, таких, что $\tilde\alpha = \tilde{d}\tilde\beta$). Оба эти множества являются векторными пространствами над полем вещественных чисел (например, если $\tilde\alpha$ и $\tilde\beta$ — замкнутые p-формы, то $a\tilde\alpha + b\tilde\beta$ тоже замкнута для любых вещественных чисел a и b). Кроме того, B^p — подпространство в Z^p, так как $\tilde{d}\tilde{d}\tilde\beta = 0$. Покажем, как можно разбить $Z^p(M)$ на классы эквивалентности относительно $B^p(M)$. Будем говорить, что две замкнутые формы $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ эквивалентны ($\tilde{\alpha}_1 \approx \tilde{\alpha}_2$), если их разность есть элемент из $B^p(M)$:

$$\tilde{\alpha}_1 \approx \tilde{\alpha}_2 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2 = \tilde{d}\tilde{\beta}. \tag{4.84}$$

Класс эквивалентности $\tilde{\alpha}_1$ состоит из всех замкнутых форм, эквивалентных ей. Множество всех классов эквивалентности называется *p-мерной группой когомологий де Рама* многообразия M и обозначается $H^p(M)$.

Упражнение 4.25. (a) Отношение $\approx$ называется *отношением эквивалентности*, если оно удовлетворяет следующим условиям: (i) для любого $\tilde{\alpha}$ имеем $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\alpha}$; (ii) если $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\beta}$, то и $\tilde{\beta} \approx \tilde{\alpha}$; (iii) если $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\beta}$ и $\tilde{\beta} \approx \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\alpha} \approx \tilde{\gamma}$. Покажите, что (4.84) определяет отношение эквивалентности.

(b) Если Z^p и B^p — *произвольные* векторное пространство и его подпространство соответственно, то множество определённых нами классов эквивалентности называется *факторпространством* пространства Z^p по B^p и обозначается Z^p/B^p. Покажите, что это — векторное пространство. (Прежде всего надо определить сложение классов эквивалентности. Докажите, а затем используйте следующее: если $\tilde{\alpha}_1$ и $\tilde{\alpha}_2$ — элементы из классов эквивалентности A_1 и A_2 соответственно, то сумма двух любых элементов из A_1 и A_2 лежит в классе эквивалентности элемента $\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2$.)

(c) Рассмотрим векторное пространство R^2 и его подпространство $R^1{}_x$, состоящее из всех векторов вида $(a, 0)$ с произвольным вещественным a. Покажите, что $R^2/R^1{}_x$ есть конгруэнция прямых, параллельных оси x.

Теперь мы можем сформулировать результат § 4.19 в виде следующего утверждения: для любого открытого шара в n-мерном пространстве или даже для любой области U, диффеоморфной такому шару, $H^p(U) = 0$ при $p \geqslant 1$, поскольку все замкнутые p-формы эквивалентны друг другу и, следовательно, нулевой p-форме. Так же легко вычислить $H^0(U)$ или даже $H^0(M)$ для любого *связного* многообразия M. Нуль-форма — это просто функция, поэтому $Z^0(M)$ есть пространство всех функций f, таких что $\tilde{d}f = 0$, т. е. постоянных функций, оно по существу совпадает с R^1. Далее, поскольку (-1)-форм в природе не существует, то пространство $B^0(M)$ состоит из одной нулевой функции. Таким образом, отношение эквивалентности $\approx$ превращается в обычное алгебраическое равенство: константы f и g эквивалентны ($f \approx g$) тогда и только тогда, когда они равны ($f = g$). Следовательно, $H^0(M) = Z^0(M) = R^1$. В случае несвязного M функции из $Z^0(M)$ должны быть константами на каждой компоненте связности M, но значения этих констант не обязательно совпадают, и $H^0(M) = Z^0(M) = R^m$, где m — число компонент связности M.

Упражнение 4.24 легко обобщить на случай произвольной размерности и убедиться в том, что $H^n(S^n) \neq 0$ (пункт (b)) и $H^{n-1}(S^n) = 0$ (пункт (c)), а в целом картина такова:

$$H^n(S^n) = R^1$$
$$H^p(S^n) = 0, \quad 0 < p < n,$$
$$H^0(S^n) = R^1. \tag{4.85}$$

Доказательство этих формул, как и многие другие интересные результаты, можно найти в книге Спивака (1970, vol. 1). Среди множества приложений теории когомологий в этой книге есть *теорема о неподвижной точке*: для чётного n на сфере S^n не существует нигде не обращающегося в нуль векторного поля.

Упражнение 4.26. Для нечётного n постройте всюду отличное от нуля векторное поле на S^n. (Указание: Рассмотрите сферу S^{2m+1} как подмногообразие в R^{2m+2} и исследуйте, как действуют на ней вращения, отвечающие матрицам T из $SO(2m+2)$, имеющим следующий вид: $T = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_{m+1})$, где каждая из матриц A_j есть одна и та же 2×2-матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Покажите, что векторное поле $d/d\theta$, порождённое этой однопараметрической подгруппой, на сфере S^{2m+1} нигде не обращается в нуль.)

Упражнение 4.27. (a) Обобщая результат упр. 4.24(b), покажите, что $(n-1)$-форма в R^n

$$\tilde{\omega} = \varepsilon_{ij \ldots k} x^i \tilde{d}x^j \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^k, \tag{4.86}$$

суженная на S^{n-1}, не имеет нулей (сфера S^{n-1} определена уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1$).

(b) Покажите, что из того, что $H^{n-1}(S^{n-1}) = R^1$ [1], следует, что для любой $(n-1)$-формы $\tilde{\alpha}$ на S^{n-1} форма $\tilde{\alpha} - a\tilde{\omega}$, где $a = \int_{S^{n-1}} \tilde{\alpha} \Big/ \int_{S^{n-1}} \tilde{\omega}$, точна.

(c) Дуализуя это утверждение, покажите, что любую функцию f на S^{n-1} можно представить в виде $f = c + \mathrm{div}_{\tilde{\omega}} \overline{V}$,

[1] См. (4.85). — *Прим. ред.*

где c — некоторая константа, а $\bar{V}$ — векторное поле на S^{n-1}.

(d) Докажите, что $H^1(S^1) = R^1$, явно построив функцию f, для которой $\tilde{d}f = \tilde{\alpha} - a\tilde{\omega}$ (см. (b)).

Упражнение 4.28. (a) Предположим, что один-форма $\tilde{\alpha}$ на M такова, что $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$ для любой замкнутой кривой $\mathscr{C}$ в M. Покажите, что $\tilde{\alpha}$ точна, т. е. существует функция f, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$.

(b) Связное многообразие M называется *односвязным*, если любая замкнутая кривая на нём может быть непрерывно стянута в точку. Покажите, что M односвязно тогда и только тогда, когда $H^1(M) = 0$.

Прежде чем расстаться с теорией когомологий, сделаем два коротких замечания. Во-первых, *размерность* пространства $H^p(M)$ называется p-мерным *числом Бетти* многообразия M и обозначается через b^p. Во-вторых, хотя наше определение $H^p(M)$ основано на использовании дифференциальной структуры многообразия, одна из основных теорем теории когомологий (теорема де Рама) утверждает, что на самом деле группы когомологий определяются исключительно топологической структурой многообразия M, а от его дифференциальной структуры не зависит. Подробное обсуждение вопроса можно найти в книге Уорнера (1971).

4.25. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотренный в § 4.17 пример того, как внешнее дифференцирование связано с условием интегрируемости, показывает также, что по крайней мере для уравнений в частных производных первого порядка можно естественным образом трактовать эти уравнения как соотношения между формами. Это обстоятельство чрезвычайно важно, и мы сейчас остановимся на нём подробнее.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

представленное в виде

$$\mathrm{d}y = f(x, y)\,\mathrm{d}x. \tag{4.87}$$

Так и хочется записать его как уравнение для один-форм на двумерном многообразии M с координатами x и y

$$\tilde{d}y - f\tilde{d}x = 0, \tag{4.88}$$