где c — некоторая константа, а $\bar{V}$ — векторное поле на S^{n-1}.

(d) Докажите, что $H^1(S^1) = R^1$, явно построив функцию f, для которой $\tilde{d}f = \tilde{\alpha} - a\tilde{\omega}$ (см. (b)).

Упражнение 4.28. (a) Предположим, что один-форма $\tilde{\alpha}$ на M такова, что $\int_{\mathscr{C}} \tilde{\alpha} = 0$ для любой замкнутой кривой $\mathscr{C}$ в M. Покажите, что $\tilde{\alpha}$ точна, т. е. существует функция f, такая что $\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$.

(b) Связное многообразие M называется *односвязным*, если любая замкнутая кривая на нём может быть непрерывно стянута в точку. Покажите, что M односвязно тогда и только тогда, когда $H^1(M) = 0$.

Прежде чем расстаться с теорией когомологий, сделаем два коротких замечания. Во-первых, *размерность* пространства $H^p(M)$ называется p-мерным *числом Бетти* многообразия M и обозначается через b^p. Во-вторых, хотя наше определение $H^p(M)$ основано на использовании дифференциальной структуры многообразия, одна из основных теорем теории когомологий (теорема де Рама) утверждает, что на самом деле группы когомологий определяются исключительно топологической структурой многообразия M, а от его дифференциальной структуры не зависит. Подробное обсуждение вопроса можно найти в книге Уорнера (1971).

4.25. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотренный в § 4.17 пример того, как внешнее дифференцирование связано с условием интегрируемости, показывает также, что по крайней мере для уравнений в частных производных первого порядка можно естественным образом трактовать эти уравнения как соотношения между формами. Это обстоятельство чрезвычайно важно, и мы сейчас остановимся на нём подробнее.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

представленное в виде

$$dy = f(x, y)\,dx. \tag{4.87}$$

Так и хочется записать его как уравнение для один-форм на двумерном многообразии M с координатами x и y

$$\tilde{d}y - f\tilde{d}x = 0, \tag{4.88}$$

где f теперь — функция на M. Каков смысл этого уравнения? Поскольку формы $\tilde{d}y$ и $\tilde{d}x$ на таком многообразии линейно-независимы, (4.88) на самом деле не может быть верным — оно не может быть тождеством. Но, с другой стороны, мы и не обязаны понимать его как тождество. Уравнение (4.87), из которого мы его получили, — это соотношение между «приращениями» dy и dx, выполняющееся *только на решении*. Решение же (4.87) имеет вид $y = g(x)$ и определяет в M кривую (или, во всяком случае, путь), т. е. одномерное подмногообразие в M. Коэффициент наклона векторов, касательных к этому подмногообразию, dy/dx, равен $f(x, y)$. Рассмотрим один такой вектор $\bar{V}$ в некоторой точке P, имеющий компоненты $(1, f(P))$. Для него $\tilde{d}y(\bar{V}) = f(P)$ и $\tilde{d}x(\bar{V}) = 1$. Таким образом, один-форма (4.88) обращается на этом векторе в нуль:

$$\blacklozenge \quad (\tilde{d}y - f\tilde{d}x)\bar{V} = 0.$$

В этом и состоит смысл (4.88): решения исходного дифференциального уравнения определяют подмногообразие в M, касательные векторы к которому *аннулируют* форму (4.88). Равенство (4.88) выполняется, когда оно ограничено на это подмногообразие. Верно и обратное: если существует подмногообразие, касательные векторы к которому аннулируют (4.88), то это подмногообразие даёт решение (4.87). Естественно, существует не одно такое подмногообразие, а целое семейство подмногообразий, отличающихся друг от друга, например, «начальным значением» решения в некоторой заданной точке $x = x_0$ (или постоянной интегрирования в решении (4.87)).

Эту картину легко обобщить. Любое заданное семейство форм (не обязательно один-форм) $\{\gamma_i,\ i = 1, \ldots, N\}$ определяет в каждой точке P подпространство в T_P, аннулирующее эти формы. Решением (интегральным подмногообразием) для этих форм (или для соответствующего дифференциального уравнения) будет многообразие, «склеенное» из таких бесконечно-малых касательных подпространств. Вопрос о том, когда такая склейка возможна, прямо связан с теоремой Фробениуса, доказанной в гл. 3. В следующем параграфе мы переформулируем эту теорему на языке форм.

Однако первый вопрос, который приходит в голову физику, — это как вообще найти тот самый (или некоторый) набор форм, который соответствует данному набору дифференциальных уравнений? Для уравнений первого порядка пример того, как это делается, был дан в упр. 4.32. Более сложный пример доставляется уравнением второго порядка для гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{4.89}$$

Для удобства будем считать ω константой. Чтоб перевести это уравнение на язык форм, представим его в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x.$$

Теперь очевидно, что найти подмногообразие, аннулирующее формы

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{d}x - y\tilde{d}t, \quad \tilde{\beta} \equiv \tilde{d}y + \omega^2 x\tilde{d}t,$$

и решить (4.89) — это одно и то же. Многообразие, на котором определены наши формы, — трёхмерное, с координатами (x, y, t). Подмногообразие решений будет одномерным, поскольку требование обращения в нуль $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ налагает два условия на вектор в данной точке многообразия. Другие поучительные примеры можно найти в работах Estabrook (1976) и Harrison & Estabrook (1971), указанных в библиографии в конце главы, мы же переходим к вопросу *существования* решения таких уравнений.

4.26. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА НА ЯЗЫКЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Итак, мы возвращаемся к одной из важнейших теорем дифференциального исчисления на многообразиях, теореме, которую мы обсуждали в § 3.7, используя язык производных Ли. Чтобы переформулировать её в терминах дифференциальных форм, нам понадобятся некоторые определения. Набор форм $\{\tilde{\beta}_i\}$ (любой степени) определяет в каждой точке P подпространство X_P в T_P, состоящее из векторов, аннулирующих каждую из форм $\tilde{\beta}_i$. Оно называется *аннулятором* данного набора форм в точке P. *Полный идеал* набора в точке P состоит из всех форм в этой точке, ограничения которых на X_P равны нулю. (Заметим, что в P для *любой* формы $\tilde{\gamma}$ ограничение формы $\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\beta}_i$ на аннулятор $\tilde{\beta}_i$[1] есть нуль и, следовательно, содержится в нашем полном идеале.) В любом полном идеале есть семейство линейно-независимых один-форм $\{\tilde{\alpha}_i\}$, которое его порождает в том смысле, что полные идеалы $\{\tilde{\alpha}_i\}$ и $\{\tilde{\beta}_i\}$ совпадают. В упр. 4.29 явно строится такое семейство образующих.

[1] А тем более на X_P. — *Прим. ред.*