для гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \tag{4.89}$$

Для удобства будем считать ω константой. Чтоб перевести это уравнение на язык форм, представим его в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x.$$

Теперь очевидно, что найти подмногообразие, аннулирующее формы

$$\tilde{\alpha} = \tilde{d}x - y\tilde{d}t, \quad \tilde{\beta} = \tilde{d}y + \omega^2 x\tilde{d}t,$$

и решить (4.89) — это одно и то же. Многообразие, на котором определены наши формы, — трёхмерное, с координатами (x, y, t). Подмногообразие решений будет одномерным, поскольку требование обращения в нуль $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ налагает два условия на вектор в данной точке многообразия. Другие поучительные примеры можно найти в работах Estabrook (1976) и Harrison & Estabrook (1971), указанных в библиографии в конце главы, мы же переходим к вопросу *существования* решения таких уравнений.

4.26. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА НА ЯЗЫКЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Итак, мы возвращаемся к одной из важнейших теорем дифференциального исчисления на многообразиях, теореме, которую мы обсуждали в § 3.7, используя язык производных Ли. Чтобы переформулировать её в терминах дифференциальных форм, нам понадобятся некоторые определения. Набор форм $\{\tilde{\beta}_i\}$ (любой степени) определяет в каждой точке P подпространство X_P в T_P, состоящее из векторов, аннулирующих каждую из форм $\tilde{\beta}_i$. Оно называется *аннулятором* данного набора форм в точке P. *Полный идеал* набора в точке P состоит из всех форм в этой точке, ограничения которых на X_P равны нулю. (Заметим, что в P для *любой* формы $\tilde{\gamma}$ ограничение формы $\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\beta}_i$ на аннулятор $\tilde{\beta}_i$[1] есть нуль и, следовательно, содержится в нашем полном идеале.) В любом полном идеале есть семейство линейно-независимых один-форм $\{\tilde{\alpha}_j\}$, которое его порождает в том смысле, что полные идеалы $\{\tilde{\alpha}_j\}$ и $\{\tilde{\beta}_j\}$ совпадают. В упр. 4.29 явно строится такое семейство образующих.

[1] А тем более на X_P. — *Прим. ред.*

Упражнение 4.29. Пусть $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m\}$ — базис в X_P; дополним его произвольным образом векторами $\{\bar{e}_{m+1}, \ldots, \bar{e}_n\}$ до базиса в T_P. Покажите, что дуальный базис один-форм $\{\tilde{\omega}^{m+1}, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$ порождает полный идеал. Покажите, что любая форма из этого идеала записывается в виде $\sum_{i=m+1} \tilde{\gamma}^i \wedge \tilde{\omega}^i$ с некоторыми $\{\tilde{\gamma}^i\}$.

Упражнение 4.30. Пусть $\{\tilde{\alpha}_j,\ j = 1, \ldots, m\}$ — набор линейно-независимых один-форм. Покажите, что форма $\tilde{\gamma}$ содержится в их полном идеале тогда и только тогда, когда

$$\tilde{\gamma} \wedge \tilde{\alpha}_1 \wedge \tilde{\alpha}_2 \wedge \ldots \wedge \tilde{\alpha}_m = 0. \tag{4.90}$$

Вся эта алгебра легко распространяется на поля форм. Полный идеал набора полей $\{\tilde{\beta}_i\}$ состоит из всех таких полей, что в каждой точке P их аннулирует X_P — аннулятор набора $\{\tilde{\beta}_{(i)}\}$ в этой точке. Идеал называется *дифференциальным идеалом*, если вместе с любой формой $\tilde{\gamma}$ в нём содержится и $\tilde{d}\tilde{\gamma}$. Набор один-форм $\{\tilde{\alpha}_i\}$ называется *замкнутым*, если все формы $\tilde{d}\tilde{\alpha}_i$ содержатся в полном идеале, порождённом этим набором.

Упражнение 4.31. (а) Покажите, что замкнутый набор один-форм порождает дифференциальный идеал.

(b) Покажите, что любой линейно-независимый набор из $n-1$ или из n один-форм на n-мерном многообразии замкнут.

Теперь мы можем сформулировать *теорему Фробениуса*: Пусть $\{\tilde{\alpha}_i,\ i = 1, \ldots, m\}$ — набор линейно-независимых полей один-форм в открытой области U n-мерного многообразия M. Этот набор замкнут тогда и только тогда, когда существуют функции $\{P_{ij}, Q_j, i, j = 1, \ldots, m\}$, такие что

$$\blacklozenge \quad \tilde{\alpha}_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}\tilde{d}Q_j. \tag{4.91}$$

Это утверждение будет доказано в следующем параграфе, а сейчас посмотрим, что оно означает. Напомним, что мы ищем решение системы дифференциальных уравнений $\{\tilde{\alpha}_i = 0\}$. Как видно из (4.91), она эквивалентна системе $\{\tilde{d}Q_j = 0\}$. Но последняя легко решается: $\{Q_j = \text{const}\}$. Итак, *функции* $\{Q_j\}$ *являются решениями системы* $\{\tilde{\alpha}_i = 0\}$. Каждый набор значений $\{Q_j\}$ задает m-мерное подмногообразие в M. Его касательные векторы по определению аннулируют $\{\tilde{d}Q_j\}$, а следовательно и $\{\tilde{\alpha}_i\}$. В этом и состоит связь с прежней версией теоремы Фробениуса. Требование, чтоб набор один-форм был замкнут, дуально к требованию, чтоб набор аннулирующих их векторных полей составлял алгебру Ли. Ниже мы подробнее обсудим эту связь.

Формы $\{\tilde{\alpha}_i\}$, удовлетворяющие (4.91), можно было бы назвать «образующими поверхность»[1]. Теперь мы можем установить достаточность условия интегрируемости из § 4.17. В рассмотренном там случае многообразие имело размерность два, а многообразие решений — размерность один. Уравнение

$$\tilde{\alpha} = \tilde{d}f$$

имеет вид (4.91); следовательно, f существует тогда и только тогда, когда $\tilde{d}\tilde{\alpha} = 0$. Разберем более сложный пример.

Упражнение 4.32. Рассмотрим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений для функций f и g, зависящих от переменных x и y:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + A_1 f + B_1 g = C_1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y} + A_2 f + B_2 g = C_2, \\ &\frac{\partial g}{\partial x} + D_1 g + E_1 f = F_1, \\ &\frac{\partial g}{\partial y} + D_2 g + E_2 f = F_2, \end{aligned} \tag{4.92}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i $(i = 1, 2)$ зависят от x и y. Мы хотим найти условия интегрируемости для этих уравнений.

(a) На четырехмерном многообразии M с координатами (x, y, f, g) введем один-формы

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha} = \tilde{d}f + f\tilde{A} + g\tilde{B} - \tilde{C}, \\ &\tilde{\beta} = \tilde{d}g + g\tilde{D} + f\tilde{E} - \tilde{F}, \end{aligned} \tag{4.93}$$

где один-форма $\tilde{A}$ определена равенством

$$\tilde{A} = A_1\tilde{d}x + A_2\tilde{d}y \tag{4.94}$$

и аналогично определены $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, ... *Покажите*, что решение системы (4.92) эквивалентно построению двумерного подмногообразия $\mathscr{H}$ в M, на котором $\tilde{\alpha}|_{\mathscr{H}} = \tilde{\beta}|_{\mathscr{H}} = 0$.

(b) Из теоремы Фробениуса следует, что если пара $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ замкнута, то существуют функции U, V, W, X, Y, Z четырёх переменных (x, y, f, g), такие что

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha} = W\tilde{d}U + X\tilde{d}V, \\ &\tilde{\beta} = Y\tilde{d}U + Z\tilde{d}V. \end{aligned}$$

[1] В оригинале surface-forming. — *Прим. ред.*

Покажите, что

$$U(x, y, f, g) = \text{const},$$
$$V(x, y, f, g) = \text{const}$$

задают *решение* системы (4.92).

(c) Из (b) следует,что необходимое и достаточное условие существования решения — это принадлежность форм $\tilde{d}\tilde{\alpha}$ и $\tilde{d}\tilde{\beta}$ к идеалу $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. *Покажите*, что последняя имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}\tilde{d}\tilde{A} + \tilde{B}\wedge\tilde{E} &= \tilde{d}\tilde{B} + \tilde{B}\wedge\tilde{D} + \tilde{A}\wedge\tilde{B}\\ &= \tilde{d}\tilde{C} + \tilde{B}\wedge\tilde{F} + \tilde{A}\wedge\tilde{C}\\ &= \tilde{d}\tilde{D} + \tilde{E}\wedge\tilde{B} = \tilde{d}\tilde{E} + \tilde{E}\wedge\tilde{A} + \tilde{D}\wedge\tilde{E}\\ &= \tilde{d}\tilde{F} + \tilde{E}\wedge\tilde{C} + \tilde{D}\wedge\tilde{F} = 0.\end{aligned}$$

(Указание: учет того факта, что вследствие (4.94) форма $\tilde{d}\tilde{A}$ пропорциональна $\tilde{d}x\wedge\tilde{d}y$, чрезвычайно упрощает вычисления.)

(d) *Покажите*, что условия пункта (c) приводят к следующим условиям интегрируемости для (4.92):

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x} + B_2E_1 - B_1E_2 = 0,$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x} + B_2D_1 + A_2B_1 - B_1D_2 - A_1B_2 = 0$$

и т. д.

Что следует из теоремы Фробениуса относительно существования решения уравнения (4.89)? Ответ простой: поскольку любые две линейно-независимые один-формы на трёхмерном многообразии автоматически имеют замкнутый идеал (см. упр. 4.31(b)), то должны существовать функции f, g, h, l, m, n, такие что

$$\tilde{\alpha} = h\tilde{d}f + l\tilde{d}g,$$
$$\tilde{\beta} = m\tilde{d}f + n\tilde{d}g.$$

Тогда одномерные подмногообразия, задаваемые уравнениями $f = \text{const}$, $g = \text{const}$, аннулируют формы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ и, следовательно, являются многообразиями решений.

Рассмотренный нами вариант теоремы Фробениуса не применим непосредственно к системам дифференциальных уравнений, которые описываются наборами форм, включающими и формы старших степеней. В этом случае можно поступить, как в упр. 4.29, т. е. найти набор один-форм, порождающий тот же полный идеал. Отнюдь не всегда эти один-формы будут алгебраически эквивалентны исходному набору, т. е. соответствующая им система дифференциальных уравнений может не быть эквивалентна исходной. Если такого не случилось, то можно прямо применять теорему Фробениуса, в противном случае нужны более тонкие методы. Обсуждение этого вопроса можно найти в книге Шоке-Брюа и др. (1977).

4.27. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ВАРИАНТОВ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА

Напомним, как выглядит теорема в её геометрически более прозрачном варианте, описанном в гл. 3: данный набор векторных полей $\{\bar{V}_{(i)},\ i=1,\ \ldots,\ q\}$, образующий в каждой точке p-мерное векторное пространство, задает p-мерную гиперповерхность тогда и только тогда, когда всевозможные скобки Ли $[\bar{V}_{(i)},\ \bar{V}_{(j)}]$ $(i, j = 1,\ \ldots,\ q)$ суть линейные комбинации этих q векторных полей. В этой главе мы сформулировали теорему на языке форм, в терминах замкнутости их внешних производных. Эта «картинка» «дуальна», дополнительна к картинке с векторами и условием замкнутости их скобок Ли. Центральным моментом при установлении соответствия между ними является следующее наблюдение: если указанные выше векторные поля определяют в некоторой точке P нашего n-мерного многообразия r-мерное подпространство в T_P, то они же естественным образом определяют $(n-r)$-мерное подпространство в T_P^* (пространстве один-форм в точке P), состоящее из форм, аннулируемых этими векторами. В точности так же набор q один-форм определяет $(n-q)$-мерное подпространство в T_P. Итак, мы видим, что подмногообразие можно описать, *либо* задав в каждой точке r-мерное подпространство касательных к нему векторов из T_P, *либо* задав $(n-r)$-мерное подпространство один-форм, которые этими векторами аннулируются.

Собственно доказательство эквивалентности двух вариантов теоремы Фробениуса проведем в два этапа.

(1) Рассмотрим подмногообразие размерности p в n-мерном многообразии; найдётся $n-p$ различных функций $Q_{(k)}$, которые (локально) задают наше подмногообразие с помощью $n-p$ уравнений $Q_{(k)}=\mathrm{const}$. По предположению, формы $\tilde{d}Q_{(k)}$ линейно-независимы и аннулируются векторами $\bar{V}$, касательными к подмногообразию: $\langle\tilde{d}Q_{(k)},\ \bar{V}\rangle=0$. С другой стороны, касательное пространство к подмногообразию есть p-мерное векторное пространство, определяющее $(n-p)$-мерное подпространство один-форм, состоящее из форм, аннулируемых касательными векторами $\bar{V}_{(i)}$: $\langle\tilde{\beta},\ \bar{V}_{(i)}\rangle=0$. Пусть $\{\tilde{\alpha}_{(k)},\ k=1,\ \ldots,\ n-p\}$ — некий базис в этом подпростран-