тот же полный идеал. Отнюдь не всегда эти один-формы будут алгебраически эквивалентны исходному набору, т. е. соответствующая им система дифференциальных уравнений может не быть эквивалентна исходной. Если такого не случилось, то можно прямо применять теорему Фробениуса, в противном случае нужны более тонкие методы. Обсуждение этого вопроса можно найти в книге Шоке-Брюа и др. (1977).

4.27. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ВАРИАНТОВ ТЕОРЕМЫ ФРОБЕНИУСА

Напомним, как выглядит теорема в её геометрически более прозрачном варианте, описанном в гл. 3: данный набор векторных полей $\{\bar{V}_{(i)},\ i = 1, \ldots, q\}$, образующий в каждой точке p-мерное векторное пространство, задает p-мерную гиперповерхность тогда и только тогда, когда всевозможные скобки Ли $[\bar{V}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}]$ $(i, j = 1, \ldots, q)$ суть линейные комбинации этих q векторных полей. В этой главе мы сформулировали теорему на языке форм, в терминах замкнутости их внешних производных. Эта «картинка» «дуальна», дополнительна к картинке с векторами и условием замкнутости их скобок Ли. Центральным моментом при установлении соответствия между ними является следующее наблюдение: если указанные выше векторные поля определяют в некоторой точке P нашего n-мерного многообразия r-мерное подпространство в T_P, то они же естественным образом определяют $(n-r)$-мерное подпространство в T_P^* (пространстве один-форм в точке P), состоящее из форм, аннулируемых этими векторами. В точности так же набор q один-форм определяет $(n-q)$-мерное подпространство в T_P. Итак, мы видим, что подмногообразие можно описать, *либо* задав в каждой точке r-мерное подпространство касательных к нему векторов из T_P, *либо* задав $(n-r)$-мерное подпространство один-форм, которые этими векторами аннулируются.

Собственно доказательство эквивалентности двух вариантов теоремы Фробениуса проведем в два этапа.

(1) Рассмотрим подмногообразие размерности p в n-мерном многообразии; найдётся $n-p$ различных функций $Q_{(k)}$, которые (локально) задают наше подмногообразие с помощью $n-p$ уравнений $Q_{(k)} = \mathrm{const}$. По предположению, формы $\tilde{d}Q_{(k)}$ линейно-независимы и аннулируются векторами $\bar{V}$, касательными к подмногообразию: $\langle \tilde{d}Q_{(k)}, \bar{V}\rangle = 0$. С другой стороны, касательное пространство к подмногообразию есть p-мерное векторное пространство, определяющее $(n-p)$-мерное подпространство один-форм, состоящее из форм, аннулируемых касательными векторами $\bar{V}_{(i)}$: $\langle\tilde{\beta}, \bar{V}_{(i)}\rangle = 0$. Пусть $\{\tilde{\alpha}_{(k)},\ k = 1, \ldots, n-p\}$ — некий базис в этом подпростран-

стве. Поскольку формы $\tilde{d}Q_{(k)}$ тоже образуют базис, то $\tilde{\alpha}_{(k)}$ можно представить в виде линейных комбинаций $\tilde{d}Q_{(k)}$, как в (4.91). Поэтому, чтоб доказать эквивалентность, мы должны теперь убедиться в том, что условие замкнутости относительно взятия скобок Ли, которому удовлетворяют векторные поля $\bar{V}_{(i)}$, эквивалентно условию замкнутости набора форм $\{\tilde{\alpha}_{(k)}\}$.

(2) С этой целью рассмотрим равенства

$$\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-p;\ j = 1, \ldots, p)$$

и возьмём от них производные Ли относительно всевозможных $\bar{V}_{(k)}$:

$$0 = \pounds_{\bar{V}_{(k)}}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = \langle\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{i}, \bar{V}_{(j)}\rangle + \langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \pounds_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}\rangle.$$

По правилу ли-дифференцирования форм имеем

$$\langle\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = \langle\tilde{d}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(k)}\rangle, \bar{V}_{(j)}\rangle + \langle\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}), \bar{V}_{(j)}\rangle.$$

Первый член обращается в нуль, ибо $\tilde{\alpha}_i$ аннулируется вектором $\bar{V}_{(k)}$, второй же как раз и есть $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)})$ — значение $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ на двух векторах из исходного набора. Итак, если $\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}$ — линейная комбинация $\bar{V}_{(i)}$, то он аннулирует $\tilde{\alpha}_{(i)}$ и, следовательно, $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ тоже аннулируются векторами $\{\bar{V}_{(j)}\}$. Таким образом, $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ принадлежат нашему идеалу, и замкнутость в смысле скобок Ли влечёт за собой замкнутость набора форм. И обратно: легко видеть, что из замкнутости набора форм $(\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)}) = 0)$ следует замкнутость в смысле скобок Ли.

4.28. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Формы дают нам чрезвычайно удобный способ получения законов сохранения для дифференциальных уравнений. Будем считать, что решение системы уравнений эквивалентно нахождению поверхности, аннулирующей некоторый набор форм $\{\tilde{\alpha}_i\}$. Предположим, что существует форма $\tilde{\gamma}$, являющаяся линейной комбинацией $\{\tilde{\alpha}_i\}$:

$$\tilde{\gamma} = A_1\tilde{\alpha}_1 + \ldots,$$

такая что

$$\tilde{d}\tilde{\gamma} = 0.$$

Тогда существует другая форма $\tilde{\sigma}$, такая что

$$\tilde{\gamma} = \tilde{d}\tilde{\sigma}$$