стве. Поскольку формы $\tilde{d}Q_{(k)}$ тоже образуют базис, то $\alpha_{(k)}$ можно представить в виде линейных комбинаций $\tilde{d}Q_{(k)}$, как в (4.91). Поэтому, чтоб доказать эквивалентность, мы должны теперь убедиться в том, что условие замкнутости относительно взятия скобок Ли, которому удовлетворяют векторные поля $\bar{V}_{(i)}$, эквивалентно условию замкнутости набора форм $\{\tilde{\alpha}_{(k)}\}$.

(2) С этой целью рассмотрим равенства

$$\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-p;\ j = 1, \ldots, p)$$

и возьмём от них производные Ли относительно всевозможных $\bar{V}_{(k)}$:

$$0 = \pounds_{\bar{V}_{(k)}}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = \langle\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{i}, \bar{V}_{(j)}\rangle + \langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \pounds_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}\rangle.$$

По правилу ли-дифференцирования форм имеем

$$\langle\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(j)}\rangle = \langle\tilde{d}\langle\tilde{\alpha}_{(i)}, \bar{V}_{(k)}\rangle, \bar{V}_{(j)}\rangle + \langle\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}), \bar{V}_{(j)}\rangle.$$

Первый член обращается в нуль, ибо $\tilde{\alpha}_i$ аннулируется вектором $\bar{V}_{(k)}$, второй же как раз и есть $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)})$ — значение $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ на двух векторах из исходного набора. Итак, если $\pounds_{\bar{V}_{(k)}}\bar{V}_{(j)}$ — линейная комбинация $\bar{V}_{(i)}$, то он аннулирует $\tilde{\alpha}_{(i)}$ и, следовательно, $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ тоже аннулируются векторами $\{\bar{V}_{(j)}\}$. Таким образом, $\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}$ принадлежат нашему идеалу, и замкнутость в смысле скобок Ли влечёт за собой замкнутость набора форм. И обратно: легко видеть, что из замкнутости набора форм ($\tilde{d}\tilde{\alpha}_{(i)}(\bar{V}_{(k)}, \bar{V}_{(j)}) = 0$) следует замкнутость в смысле скобок Ли.

4.28. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Формы дают нам чрезвычайно удобный способ получения законов сохранения для дифференциальных уравнений. Будем считать, что решение системы уравнений эквивалентно нахождению поверхности, аннулирующей некоторый набор форм $\{\tilde{\alpha}_i\}$. Предположим, что существует форма $\tilde{\gamma}$, являющаяся линейной комбинацией $\{\tilde{\alpha}_i\}$:

$$\tilde{\gamma} = A_1\tilde{\alpha}_1 + \ldots,$$

такая что

$$\tilde{d}\tilde{\gamma} = 0.$$

Тогда существует другая форма $\tilde{\sigma}$, такая что

$$\tilde{\gamma} = \tilde{d}\tilde{\sigma}$$

в некоторой области U поверхности решения (интегральной поверхности) H и, кроме того,

$$\tilde{\gamma}|_H = \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma}|_H = 0. \tag{4.95}$$

Применяя теорему Стокса к интегралу от $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma}$ по области U, получаем

$$\int_U \tilde{d}\tilde{\sigma} = \oint_{\partial U} \tilde{\sigma}.$$

Но в силу (4.95) интеграл в левой части равен нулю, и мы заключаем, что

$$\oint_{\partial U} \tilde{\sigma}|_H = 0.$$

Это — некоторый интегральный закон сохранения, как мы продемонстрируем сейчас на примере гармонического осциллятора.

В этом случае интегральные поверхности, фигурирующие в (4.95), одномерны, следовательно, $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma}$ должна быть один-формой, а $\tilde{\sigma}$ соответственно — нуль-формой (функцией). Поскольку $\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\sigma}$ совпадает с $\tilde{\gamma}$, рассмотрим форму (обозначения те же, что и в § 4.25)

$$\tilde{\gamma} = \omega^2 X \tilde{\alpha} + y\tilde{\beta}.$$

Легко проверить, что

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{\gamma} \equiv 0 \tag{4.96}$$

и что фактически

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right). \tag{4.97}$$

Тогда на интегральной кривой, для которой $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$ и, следовательно, $\tilde{\gamma} = 0$, мы имеем

$$\tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right) = 0,$$

$$0 = \int \tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right)\Big|_{p_1}^{p_2},$$

где p_1 и p_2 — концы отрезка интегральной кривой, по которому мы интегрировали. Итак, мы видим, что энергия $\frac{1}{2}\cdot y^2 + \frac{1}{2}\cdot\omega^2 x^2$ сохраняется на интегральной кривой.

Читатель, интересующийся приложениями такого подхода к уравнениям, имеющим солитонные решения, может найти их в работе Estabrook & Wahlquist (1975), указанной в библиографии в конце главы.

Упражнение 4.33. Проверьте равенства (4.96) и (4.97).

4.29. ВЕКТОРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Теперь мы подведём итог обсуждению сферических гармоник, начатому в § 3.18. В этом параграфе мы показали, что пространство конечномерного представления группы $SO(3)$ квадратично-интегрируемыми функциями на S^2, отвечающего числу l, имеет базис $\{Y_{l,m},\ m=-l, \ldots, l\}$. Как построить аналогичный базис в пространстве векторных полей на S^2? Введем в этом пространстве естественную норму с помощью метрического тензора $\mathfrak{g}$ на S^2, который имеет в обычной сферической системе координат компоненты $\{g_{\theta\theta}=1,\ g_{\varphi\varphi}=\sin^2\theta,\ g_{\theta\varphi}=0\}$. Пусть $\tilde{\omega}$ — элемент объёма на S^2, индуцированный этой метрикой (§ 4.13) и пусть $L^2_{1,0}(S^2)$ — векторное пространство, состоящее из всех векторных полей $\bar{V}$ на S^2, имеющих конечную норму

$$\|\bar{V}\|^2 = \int_{S^2} \mathfrak{g}(\bar{V}, \bar{V})\,\tilde{\omega}. \tag{4.98}$$

Мы хотим найти векторные поля из $L^2_{1,0}(S^2)$, являющиеся собственными функциями для $\bar{l}_z$ и L^2.

Воспользуемся тем, что, во-первых, $\mathfrak{g}$ и соответственно $\tilde{\omega}$ инвариантны относительно $\bar{l}_z$ и L^2, а во-вторых, внешняя производная и производная Ли коммутируют. Из функции Y_{lm} мы построим один-форму $\tilde{d}Y_{lm}$, а из неё — вектор $\bar{\nabla}Y_{lm}$ с компонентами (индексы A и B пробегают значения 1 и 2)

$$(\bar{\nabla}Y_{lm})^A = g^{AB}(Y_{lm})_{,B}. \tag{4.99}$$

Очевидно, что этот вектор есть собственная функция для $\bar{l}_z$ и L^2:

$$\pounds_{\bar{l}_z}\bar{\nabla}Y_{lm} = \mathrm{i}\,m\bar{\nabla}Y_{lm}, \tag{4.100a}$$

$$L^2(\bar{\nabla}Y_{lm}) = -l(l+1)\bar{\nabla}Y_{lm}. \tag{4.100b}$$

Но мы не можем обойтись *одним* типом векторных гармоник, поскольку интересующее нас векторное пространство двумерно. Однако на двумерном многообразии есть и другой способ построения вектора из один-формы — операция дуализации. Таким образом мы получаем вторую собственную функцию $*\tilde{d}Y_{lm}$.