Читатель, интересующийся приложениями такого подхода к уравнениям, имеющим солитонные решения, может найти их в работе Estabrook & Wahlquist (1975), указанной в библиографии в конце главы.

***Упражнение 4.33.*** Проверьте равенства (4.96) и (4.97).

### 4.29. ВЕКТОРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Теперь мы подведём итог обсуждению сферических гармоник, начатому в § 3.18. В этом параграфе мы показали, что пространство конечномерного представления группы $SO(3)$ квадратично-интегрируемыми функциями на $S^2$, отвечающего числу $l$, имеет базис $\{Y_{l,m},\ m=-l, \ldots, l\}$. Как построить аналогичный базис в пространстве векторных полей на $S^2$? Введем в этом пространстве естественную норму с помощью метрического тензора $\mathfrak{g}$ на $S^2$, который имеет в обычной сферической системе координат компоненты $\{g_{\theta\theta}=1,\ g_{\varphi\varphi}=\sin^2\theta,\ g_{\theta\varphi}=0\}$. Пусть $\tilde{\omega}$ — элемент объёма на $S^2$, индуцированный этой метрикой (§ 4.13) и пусть $L^2_{1,0}(S^2)$ — векторное пространство, состоящее из всех векторных полей $\bar{V}$ на $S^2$, имеющих конечную норму

$$\|\bar{V}\|^2=\int_{S^2}\mathfrak{g}(\bar{V},\bar{V})\,\tilde{\omega}. \tag{4.98}$$

Мы хотим найти векторные поля из $L^2_{1,0}(S^2)$, являющиеся собственными функциями для $\bar{l}_z$ и $L^2$.

Воспользуемся тем, что, во-первых, $\mathfrak{g}$ и соответственно $\tilde{\omega}$ инвариантны относительно $\bar{l}_z$ и $L^2$, а во-вторых, внешняя производная и производная Ли коммутируют. Из функции $Y_{lm}$ мы построим один-форму $\tilde{d}Y_{lm}$, а из неё — вектор $\bar{\nabla}Y_{lm}$ с компонентами (индексы $A$ и $B$ пробегают значения 1 и 2)

$$(\bar{\nabla}Y_{lm})^A=g^{AB}(Y_{lm})_{,B}. \tag{4.99}$$

Очевидно, что этот вектор есть собственная функция для $\bar{l}_z$ и $L^2$:

$$\mathcal{L}_{\bar{l}_z}\bar{\nabla}Y_{lm}=\mathrm{i}\,m\bar{\nabla}Y_{lm}, \tag{4.100a}$$

$$L^2(\bar{\nabla}Y_{lm})=-l(l+1)\bar{\nabla}Y_{lm}. \tag{4.100b}$$

Но мы не можем обойтись *одним* типом векторных гармоник, поскольку интересующее нас векторное пространство двумерно. Однако на двумерном многообразии есть и другой способ построения вектора из один-формы — операция дуализации. Таким образом мы получаем вторую собственную функцию $*\tilde{d}Y_{lm}$.

*Упражнение 4.34.* Покажите, что $\overline{\nabla} Y_{lm}$ и $^*\tilde{d} Y_{lm}$ линейно-независимы в каждой точке.

Как следует из теоремы о полноте, приведённой в § 3.18, две системы векторных сферических гармоник

◆ $$\overline{Y}^+_{lm} \equiv \overline{\nabla} Y_{lm}, \qquad (4.101a)$$

◆ $$\overline{Y}^-_{lm} \equiv {}^*\tilde{d} Y_{lm} \qquad (4.101b)$$

образуют полную систему в пространстве векторных полей на двумерной сфере.

Можно пойти дальше и таким же способом построить сферические гармоники для тензоров второго ранга. Однако это потребовало бы привлечения ковариантных производных на сфере, с которыми мы пока что не знакомы (см. гл. 6). Интересующегося читателя отсылаем к работе Regge & Wheeler (1957), указанной в библиографии.

Отметим, что мы рассматривали скалярные и векторные сферические гармоники лишь *на сфере.* В приложениях обычно фигурируют бо́льшие многообразия со сферической симметрией, для которых сферы являются подмногообразиями. В качестве простого примера рассмотрим трёхмерное евклидово пространство $E^3$. Функцию на $E^3$ можно разложить в ряд $\sum f_{lm}(r) \times Y_{lm}$, где вся зависимость от $r$ сосредоточена в $\{f_{lm}\}$. Векторное поле $\overline{V}$ на $E^3$ можно расщепить на два поля:

$$\overline{V} = \overline{V}_{\perp} + \overline{V}_{\mathrm{T}},$$

где $\overline{V}_{\perp}$ перпендикулярно к сферам (параллельно $\bar{e}_r$), а $\overline{V}_{\mathrm{T}}$ касательно к ним. Если мы представим $\overline{V}_{\perp}$ в виде $v\bar{e}_r$, где $v$ — некоторая функция, то при вращениях $v$ преобразуется как скалярная функция на сфере, а $\overline{V}_{\mathrm{T}}$ преобразуется как векторное поле на сфере. Поэтому $\overline{V}_{\mathrm{T}}$ надо разлагать по векторным сферическим гармоникам, а $v$ — по скалярным. (Многие авторы умножают скалярные гармоники на $\bar{e}_r$ и называют получившуюся систему третьим типом векторных сферических гармоник.) Мы будем использовать эти разложения при рассмотрении космологических моделей в части Е гл. 5.

Существуют и другие, эквивалентные определения векторных сферических гармоник, имеющие на первый взгляд мало общего с нашими. Например, их можно определить с помощью методов теории групп (см. Edmonds, 1957). Построенная здесь система удобна для работы с дифференциальными уравнениями, где естественно возникают использованные нами производные.