независимых компонент. Чтобы доказать это, заметим, что всякая ненулевая компонента нашего тензора определяется p различными числами, выбираемыми из множества $(1, \ldots, n)$. (Числа должны быть попарно различными, ибо при любых двух равных индексах компонента антисимметричного тензора обращается в нуль; ср. с упр. 4.1.) Порядок, в каком выбраны эти p чисел, т. е. порядок индексов компоненты, влияет самое большее на её знак, следовательно, все компоненты, индексы которых являются перестановками заданного множества p чисел, можно считать известными, если известна хотя бы одна из них. Таким образом, число *независимых* компонент равно числу различных наборов из p чисел, выбранных из множества n чисел, а это как раз и есть биномиальный коэффициент, указанный выше.

Упражнение 4.3. Докажите, что если $p > n$, то все компоненты антисимметричного тензора типа $\binom{0}{p}$ на n-мерном векторном пространстве равны нулю.

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Дифференциальная форма степени p, или, короче, *p-форма* ($p \geqslant 2$), — это, по определению, антисимметричный тензор типа $\binom{0}{p}$. Как уже было определено ранее, один-форма — это тензор типа $\binom{0}{1}$. Скалярные функции называются *нуль-формами.*

Упражнение 4.4. Покажите, что множество всех p-форм фиксированной степени p само является векторным пространством относительно операции сложения, определённой в упр. 2.4. Следовательно, оно является подпространством пространства всех тензоров типа $\binom{0}{p}$. Какова его размерность?

Точно так же, как тензоры типа $\binom{0}{2}$ можно получать из тензоров типа $\binom{0}{1}$ при помощи операции взятия тензорного произведения $\otimes$, так и два-формы можно строить из один-форм при помощи операции $\wedge$ (называемой операцией взятия *внешнего произведения*), которую мы сейчас и определим. Если $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ — один-формы, то их внешнее произведение задаётся формулой

$$\tilde{p} \wedge \tilde{q} \equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p}. \tag{4.8}$$

В отличие от формулы (4.2) множитель 1/2! здесь *отсутствует*!

Упражнение 4.5. Проверьте, что $\tilde{p} \wedge \tilde{q}$ есть два-форма. Покажите, что $\tilde{p} \wedge \tilde{p} = 0$.

Упражнение 4.6. Пусть $\{\bar{e}_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ — базис данного векторного пространства, а $\{\tilde{\omega}^j\}$ — двойственный ему базис один-форм. Покажите, что $\{\tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k,\ j,\ k = 1, \ldots, n\}$ будет базисом векторного пространства всех два-форм. Указание: для произвольной два-формы $\tilde{\alpha}$ рассмотрите числа $\alpha_{ij} = \tilde{\alpha}(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ и покажите, что

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{2!} \alpha_{ij} \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j. \tag{4.9}$$

Обратите внимание на множитель 1/2! в (4.9); он обусловлен тем, что в рассматриваемую сумму по (i, j) равный вклад вносят $\tilde{\omega}^i \otimes \tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^j \otimes \tilde{\omega}^i$. Появление этого множителя именно здесь объясняется тем, что мы не ввели его в определение внешнего произведения (см. (4.8)), как это делается в некоторых руководствах. Это дело вкуса.

Формула для внешнего произведения естественным образом распространяется на три-формы:

$$\begin{aligned}\tilde{p} \wedge (\tilde{q} \wedge \tilde{r}) &= (\tilde{p} \wedge \tilde{q}) \wedge \tilde{r} = \tilde{p} \wedge \tilde{q} \wedge \tilde{r} \\ &\equiv \tilde{p} \otimes \tilde{q} \otimes \tilde{r} + \tilde{q} \otimes \tilde{r} \otimes \tilde{p} + - \ldots;\end{aligned} \tag{4.10}$$

фигурирующие здесь перестановки и знаки те же, что и в предыдущем параграфе. Заметим, что эта формула и её обобщение на случай любого конечного числа один-форм позволяют определить внешние произведения для произвольных p- и q-форм, ибо, согласно упр. 4.6, произвольную p-форму можно представить в виде линейной комбинации внешних произведений p один-форм (базисных один-форм).

Множество всех форм любой степени, снабжённое антикоммутативным умножением $\wedge$, называется *алгеброй Грассмана* (или *грассмановой алгеброй*).

Упражнение 4.7. Покажите, что сумма размерностей всех пространств p-форм, $p \leqslant n$, равна 2^n. (Указание: используйте биномиальную теорему.) Такова размерность пространства грассмановой алгебры.

Упражнение 4.8. Покажите, что если $\tilde{p}$ — один-форма, а $\tilde{q}$ — два-форма, то

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{ijk} = p_i q_{jk} + p_j q_{ki} + p_k q_{ij} = 3 p_{[i} q_{jk]}.$$

Вообще покажите, что для любых p-формы $\tilde{p}$ и q-формы $\tilde{q}$

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{i \dots jk \dots l} = C_p^{p+q} \tilde{p}_{[i \dots j} \tilde{q}_{k \dots l]}. \tag{4.11}$$

4.4. ОБРАЩЕНИЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ

Алгебра форм достаточно проста, сложности связаны лишь с необходимостью следить за знаками и факториалами. Как будет видно из этого и последующих параграфов, лучший способ прийти к правильному результату — это действовать тщательно и неторопливо. Например, выведем правило коммутации форм. Если $\tilde{p}$ — p-форма, а $\tilde{q}$ — q-форма, то

◆ $$\tilde{p} \wedge \tilde{q} = (-1)^{pq} \tilde{q} \wedge \tilde{p}. \tag{4.12}$$

Чтоб убедиться в этом, представим $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ в виде суммы компонент, умноженных на внешние произведения форм $\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l$ (p и q множителей в каждом внешнем произведении соответственно), и покажем, что (4.12) выполнено для каждого простого произведения

$$(\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j) \wedge (\tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l).$$

В силу ассоциативности внешнего произведения скобки в этом выражении можно опустить. Если переставить два любых множителя (например, $\tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^k$), то выражение изменит знак. Переставляя $\tilde{\omega}^j$ с q множителями $\tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l$, мы изменим знак q раз, и в итоге

$$\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l = \\ = (-1)^q \tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l \wedge \tilde{\omega}^j.$$

Проделав то же самое с каждым из p множителей $\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j$, получим требуемый множитель $[(-1)^q]^p$, что и доказывает (4.12).

В дальнейшем нам понадобится операция *свёртки* вектора с формой. Чтоб получить из p-формы вещественное число, требуется p векторов. Если же подставлен только один аргумент, то p-форма превратится в $(p-1)$-форму. А именно, определим $(p-1)$-форму, полученную свёрткой p-формы $\tilde{\alpha}$ с вектором $\bar{\xi}$, следующей формулой:

◆ $$\tilde{\alpha}(\bar{\xi}) \equiv \tilde{\alpha}(\bar{\xi}, \underbrace{\ ,\ , \dots,}_{p-1 \text{ пустых мест}}), \quad [\tilde{\alpha}(\bar{\xi})]_{j \dots k} = \alpha_{ij \dots k} \xi^i. \tag{4.13}$$

Заметим, что если мы поставим $\bar{\xi}$ вместо первого на какое-то другое место, то это скажется только на знаке $\tilde{\alpha}(\bar{\xi})$. Чтоб понять, как это происходит, рассмотрим $\tilde{\alpha} = \tilde{p} \wedge \tilde{q}$, где $\tilde{p}$ и