Вообще покажите, что для любых p-формы $\tilde{p}$ и q-формы $\tilde{q}$

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})_{i \dots jk \dots l} = C_p^{p+q} p_{[i \dots j} q_{k \dots l]}. \qquad (4.11)$$

4.4. ОБРАЩЕНИЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ

Алгебра форм достаточно проста, сложности связаны лишь с необходимостью следить за знаками и факториалами. Как будет видно из этого и последующих параграфов, лучший способ прийти к правильному результату — это действовать тщательно и неторопливо. Например, выведем правило коммутации форм. Если $\tilde{p}$ — p-форма, а $\tilde{q}$ — q-форма, то

◆ $$\tilde{p} \wedge \tilde{q} = (-1)^{pq} \tilde{q} \wedge \tilde{p}. \qquad (4.12)$$

Чтоб убедиться в этом, представим $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ в виде суммы компонент, умноженных на внешние произведения форм $\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l$ (p и q множителей в каждом внешнем произведении соответственно), и покажем, что (4.12) выполнено для каждого простого произведения

$$(\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j) \wedge (\tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l).$$

В силу ассоциативности внешнего произведения скобки в этом выражении можно опустить. Если переставить два любых множителя (например, $\tilde{\omega}^j$ и $\tilde{\omega}^k$), то выражение изменит знак. Переставляя $\tilde{\omega}^j$ с q множителями $\tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l$, мы изменим знак q раз, и в итоге

$$\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l = \\ = (-1)^q \tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^k \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^l \wedge \tilde{\omega}^j.$$

Проделав то же самое с каждым из p множителей $\tilde{\omega}^i \wedge \dots \wedge \tilde{\omega}^j$, получим требуемый множитель $[(-1)^q]^p$, что и доказывает (4.12).

В дальнейшем нам понадобится операция *свёртки* вектора с формой. Чтоб получить из p-формы вещественное число, требуется p векторов. Если же подставлен только один аргумент, то p-форма превратится в $(p-1)$-форму. А именно, определим $(p-1)$-форму, полученную свёрткой p-формы $\tilde{\alpha}$ с вектором $\bar{\xi}$, следующей формулой:

◆ $$\tilde{\alpha}(\bar{\xi}) \equiv \tilde{\alpha}(\bar{\xi}, \underbrace{\ ,\ , \dots,}_{p-1 \text{ пустых мест}}), \quad [\tilde{\alpha}(\bar{\xi})]_{j \dots k} = \alpha_{ij \dots k} \xi^i. \qquad (4.13)$$

Заметим, что если мы поставим $\bar{\xi}$ вместо первого на какое-то другое место, то это скажется только на знаке $\tilde{\alpha}(\bar{\xi})$. Чтоб понять, как это происходит, рассмотрим $\tilde{\alpha} = \tilde{p} \wedge \tilde{q}$, где $\tilde{p}$ и

$\tilde{q}$ — 1-формы:

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})(\bar{\xi}) = (\tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p})(\bar{\xi}) = \tilde{p}(\bar{\xi})\,\tilde{q} - \tilde{q}(\bar{\xi})\tilde{p}.$$

Таким образом, хотя $\bar{\xi}$ свёртывается с первым аргументом $\tilde{p} \wedge \tilde{q}$, перестановки, которых требует операция внешнего произведения, приводят к тому, что $\bar{\xi}$ свёртывается с каждой из 1-форм, входящих в это произведение. Аналогично для произведения p штук 1-форм мы находим

$$\begin{aligned}(\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k)(\bar{\xi}) &= \xi^i \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k \\ &\quad - \xi^j \tilde{\omega}^i \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k + \ldots \\ &\quad \pm \xi^k \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \\ &= p\xi^{[i} \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{k]}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Из этой формулы и обобщения формулы (4.2) следует, что если $\tilde{\alpha}$ — p-форма, то

$$\tilde{\alpha}(\bar{\xi}) = \frac{1}{(p-1)!}\, \xi^i \alpha_{ij\ldots k} \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k. \tag{4.15}$$

Этот ответ, конечно, прямо следует из (4.13) и (4.9). Аналогично если $\tilde{\alpha}$ — произвольная форма, а $\tilde{\beta}$ — p-форма, то

◆ $$(\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha})(\bar{\xi}) = \tilde{\beta}(\bar{\xi})\,\tilde{\alpha} + (-1)^p \tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}(\bar{\xi}). \tag{4.16}$$

Это можно доказать, рассматривая опять каждую компоненту $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}$ по отдельности.

Упражнение 4.9. Докажите (4.16).

Для $\tilde{\alpha}(\bar{\xi})$ широко применяется и другое обозначение: $\bar{\xi} \lrcorner\, \tilde{\alpha}$

4.5. ОГРАНИЧЕНИЕ ФОРМ

Элементарным, но важным является понятие ограничения (сужения) формы на подпространство исходного векторного пространства V. Поскольку p-форма есть тензор типа $\binom{0}{p}$, её областью определения служит множество всех векторов из V (точнее, областью определения служит *произведение* $V \times V \times \ldots \times V$ p экземпляров пространства V). *Ограничение* (*или сужение*) $\tilde{\alpha}$ на подпространство W пространства V — это та же самая p-форма $\tilde{\alpha}$, только её область определения ограничена векторами из W. Мы обозначаем её $\tilde{\alpha}|_W$:

$$\tilde{\alpha}|_W(\bar{X}, \ldots, \bar{Y}) = \tilde{\alpha}(\bar{X}, \ldots, \bar{Y}),$$

где все $\bar{X}, \ldots, \bar{Y}$ — из W. Таким образом, форма $\tilde{\alpha}|_W$ определена лишь на W. Заметим, что если размерность W m меньше p, то сужение $\tilde{\alpha}|_W$ — просто нуль (при $p > m$ любая p-форма