$\tilde{q}$ — 1-формы:

$$(\tilde{p} \wedge \tilde{q})(\bar{\xi}) = (\tilde{p} \otimes \tilde{q} - \tilde{q} \otimes \tilde{p})(\bar{\xi}) = \tilde{p}(\bar{\xi})\tilde{q} - \tilde{q}(\bar{\xi})\tilde{p}.$$

Таким образом, хотя $\bar{\xi}$ свёртывается с первым аргументом $\tilde{p} \wedge \tilde{q}$, перестановки, которых требует операция внешнего произведения, приводят к тому, что $\bar{\xi}$ свёртывается с каждой из 1-форм, входящих в это произведение. Аналогично для произведения p штук 1-форм мы находим

$$\begin{aligned}(\tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k)(\bar{\xi}) = \xi^i \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k \\ - \xi^j \tilde{\omega}^i \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k + \ldots \\ \pm \xi^k \tilde{\omega}^i \wedge \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \\ = p\xi^{[i} \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^{k]}.\end{aligned} \qquad (4.14)$$

Из этой формулы и обобщения формулы (4.2) следует, что если $\tilde{\alpha}$ — p-форма, то

$$\tilde{\alpha}(\bar{\xi}) = \frac{1}{(p-1)!} \xi^i \alpha_{ij \ldots k} \tilde{\omega}^j \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}^k. \qquad (4.15)$$

Этот ответ, конечно, прямо следует из (4.13) и (4.9). Аналогично если $\tilde{\alpha}$ — произвольная форма, а $\tilde{\beta}$ — p-форма, то

◆ $$(\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha})(\bar{\xi}) = \tilde{\beta}(\bar{\xi})\tilde{\alpha} + (-1)^p \tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}(\bar{\xi}). \qquad (4.16)$$

Это можно доказать, рассматривая опять каждую компоненту $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\alpha}$ по отдельности.

Упражнение 4.9. Докажите (4.16).

Для $\tilde{\alpha}(\bar{\xi})$ широко применяется и другое обозначение: $\bar{\xi} \lrcorner \tilde{\alpha}$

4.5. ОГРАНИЧЕНИЕ ФОРМ

Элементарным, но важным является понятие ограничения (сужения) формы на подпространство исходного векторного пространства V. Поскольку p-форма есть тензор типа $\binom{0}{p}$, её областью определения служит множество всех векторов из V (точнее, областью определения служит *произведение* $V \times V \times \ldots \times V$ p экземпляров пространства V). *Ограничение* (*или сужение*) $\tilde{\alpha}$ на подпространство W пространства V — это та же самая p-форма $\tilde{\alpha}$, только её область определения ограничена векторами из W. Мы обозначаем её $\tilde{\alpha}|_W$:

$$\tilde{\alpha}|_W(\bar{X}, \ldots, \bar{Y}) = \tilde{\alpha}(\bar{X}, \ldots, \bar{Y}),$$

где все $\bar{X}, \ldots, \bar{Y}$ — из W. Таким образом, форма $\tilde{\alpha}|_W$ определена лишь на W. Заметим, что если размерность W m меньше p, то сужение $\tilde{\alpha}|_W$ — просто нуль (при $p > m$ любая p-форма на m-мерном пространстве — нулевая), а если $p = m$, то $\tilde{\alpha}|_W$ имеет одну независимую компоненту. Операцию сужения часто называют «сечением», поскольку наглядно векторное подпространство W можно представлять себе в виде плоскости, рассекающей семейство поверхностей, представляющих форму. Говорят, что форма *аннулируется* векторным пространством, если её сужение на это пространство обращается в нуль.

4.6. ПОЛЯ ФОРМ

Как и для всякого тензора, *поле* p-форм на многообразии M есть правило (удовлетворяющее соответствующим условиям дифференцируемости), сопоставляющее каждой точке многообразия M p-форму. Поэтому все сделанные нами раньше замечания применимы к формам, рассматриваемым как функции на пространстве T_P в каждой точке P многообразия M. Лишь один пункт нуждается в уточнении: поскольку любое подмногообразие S выделяет в каждой точке P, принадлежащей S, подпространство V_P касательного пространства T_P, мы определим сужение поля p-форм $\tilde{\alpha}$ на S как поле, образованное сужением $\tilde{\alpha}$ на V_P в каждой точке P. Для случая 1-форм мы уже имели пример такого сужения в § 3.6.

4.7. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

На любом n-мерном многообразии пространство n-форм в каждой точке одномерно (см. (4.7)). Выберем некоторое поле n-форм и обозначим его $\tilde{\omega}$. Рассмотрим векторный базис $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ в точке P. Поскольку векторы базиса линейно-независимы, то $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\tilde{\omega} \neq 0$ в точке P. Поэтому $\tilde{\omega}$ делит множество *всех* базисов в точке P на два класса: базисы, на которых $\tilde{\omega}$ положительна, и те, на которых она отрицательна. На самом деле эти классы не зависят от конкретного выбора формы $\tilde{\omega}$. А именно, если $\tilde{\omega}'$ — другая n-форма, отличная от нуля в точке P, то существует число $f \neq 0$, такое что $\tilde{\omega}' = f\tilde{\omega}$. Если $\tilde{\omega}$ положительна на каких-то двух базисах, то и $\tilde{\omega}'$ будет иметь на них один и тот же знак (плюс, если $f > 0$, и минус, если $f < 0$) и оба базиса опять-таки окажутся в одном классе. Итак, все базисы в данной точке попадают в один из двух классов: *правозакрученные* и *левозакрученные*. (Как называть какой класс, конечно же, вопрос соглашения; важно то, что сами классы чётко определены.) Многообразие называется (внутренне) *ориентируемым*, если возможно определить закрученность согласованно (т. е. непрерывно) на всём много-