на m-мерном пространстве — нулевая), а если $p = m$, то $\tilde{\alpha}|_W$ имеет одну независимую компоненту. Операцию сужения часто называют «сечением», поскольку наглядно векторное подпространство W можно представлять себе в виде плоскости, рассекающей семейство поверхностей, представляющих форму. Говорят, что форма *аннулируется* векторным пространством, если её сужение на это пространство обращается в нуль.

4.6. ПОЛЯ ФОРМ

Как и для всякого тензора, *поле* p-форм на многообразии M есть правило (удовлетворяющее соответствующим условиям дифференцируемости), сопоставляющее каждой точке многообразия M p-форму. Поэтому все сделанные нами раньше замечания применимы к формам, рассматриваемым как функции на пространстве T_P в каждой точке P многообразия M. Лишь один пункт нуждается в уточнении: поскольку любое подмногообразие S выделяет в каждой точке P, принадлежащей S, подпространство V_P касательного пространства T_P, мы определим сужение поля p-форм $\tilde{\alpha}$ на S как поле, образованное сужением $\tilde{\alpha}$ на V_P в каждой точке P. Для случая 1-форм мы уже имели пример такого сужения в § 3.6.

4.7. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

На любом n-мерном многообразии пространство n-форм в каждой точке одномерно (см. (4.7)). Выберем некоторое поле n-форм и обозначим его $\tilde{\omega}$. Рассмотрим векторный базис $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ в точке P. Поскольку векторы базиса линейно-независимы, то $\tilde{\omega}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n)$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\tilde{\omega} \neq 0$ в точке P. Поэтому $\tilde{\omega}$ делит множество *всех* базисов в точке P на два класса: базисы, на которых $\tilde{\omega}$ положительна, и те, на которых она отрицательна. На самом деле эти классы не зависят от конкретного выбора формы $\tilde{\omega}$. А именно, если $\tilde{\omega}'$ — другая n-форма, отличная от нуля в точке P, то существует число $f \neq 0$, такое что $\tilde{\omega}' = f\tilde{\omega}$. Если $\tilde{\omega}$ положительна на каких-то двух базисах, то и $\tilde{\omega}'$ будет иметь на них один и тот же знак (плюс, если $f > 0$, и минус, если $f < 0$) и оба базиса опять-таки окажутся в одном классе. Итак, все базисы в данной точке попадают в один из двух классов: *правозакрученные* и *левозакрученные*. (Как называть какой класс, конечно же, вопрос соглашения; важно то, что сами классы чётко определены.) Многообразие называется (внутренне) *ориентируемым*, если возможно определить закрученность согласованно (т. е. непрерывно) на всём многообразии, иными словами, если существует n непрерывных векторных полей $\{\bar{e}_1(P), \ldots, \bar{e}_n(P)\}$, таких что в каждой точке P они образуют базис одной и той же ориентации. Понятно, что это эквивалентно существованию n-формы, всюду непрерывной и отличной от нуля. Эвклидово пространство ориентируемо, лист Мёбиуса нет.

4.8. ОБЪЁМЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Вспомним, что формы связаны с элементом объёма. На n-мерном многообразии набор из n линейно-независимых «бесконечно-малых» векторов определяет область ненулевого объёма, n-мерный параллелепипед. Объём этой области есть значение n-формы. Можно выбрать любую n-форму в качестве формы объёма; этот выбор диктуется лишь рассматриваемой задачей.

Интегрирование функции на многообразии сводится по существу к умножению значения функции на объём малого координатного элемента, а затем к суммированию полученных чисел. Возвращаясь к форме объёма, введем удобные обозначения. Пусть $\tilde{\omega}$ — это n-форма в области U n-мерного многообразия M с координатами $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Тогда, поскольку все n-формы в данной точке образуют одномерное векторное пространство, существует некоторая функция $f(x^1, \ldots, x^n)$, такая что

$$\tilde{\omega} = f\tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n.$$

Чтоб проинтегрировать по области U, разобьём её на маленькие области («ячейки») — параллелепипеды, построенные на n векторах $\{\Delta x^1 \partial/\partial x^1, \ldots, \Delta x^n \partial/\partial x^n\}$, где $\{\Delta x^i\}$ — малые числа. Интеграл функции f по одной ячейке аппроксимируем значением f, умноженным на произведение

$$\Delta x^1 \Delta x^2 \ldots \Delta x^n = \tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n(\Delta x^1 \partial/\partial x^1, \ldots, \Delta x^n \partial/\partial x^n).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\text{ячейка}} f(x^1, \ldots, x^n) \cong \tilde{\omega}\,(\text{ячейка}). \qquad (4.17)$$

Просуммировав по всем ячейкам и взяв предел при стремящемся к нулю размере ячейки, мы получим то, что будем называть *интегралом* $\tilde{\omega}$ *по* U:

$$\blacklozenge \quad \int \tilde{\omega} \equiv \int f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n, \qquad (4.18)$$