образии, иными словами, если существует n непрерывных векторных полей $\{\bar{e}_1(P), \ldots, \bar{e}_n(P)\}$, таких что в каждой точке P они образуют базис одной и той же ориентации. Понятно, что это эквивалентно существованию n-формы, всюду непрерывной и отличной от нуля. Эвклидово пространство ориентируемо, лист Мёбиуса нет.

4.8. ОБЪЁМЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ОРИЕНТИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Вспомним, что формы связаны с элементом объёма. На n-мерном многообразии набор из n линейно-независимых «бесконечно-малых» векторов определяет область ненулевого объёма, n-мерный параллелепипед. Объём этой области есть значение n-формы. Можно выбрать любую n-форму в качестве формы объёма; этот выбор диктуется лишь рассматриваемой задачей.

Интегрирование функции на многообразии сводится по существу к умножению значения функции на объём малого координатного элемента, а затем к суммированию полученных чисел. Возвращаясь к форме объёма, введем удобные обозначения. Пусть $\tilde{\omega}$ — это n-форма в области U n-мерного многообразия M с координатами $\{x^1, \ldots, x^n\}$. Тогда, поскольку все n-формы в данной точке образуют одномерное векторное пространство, существует некоторая функция $f(x^1, \ldots, x^n)$, такая что

$$\tilde{\omega} = f\tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n.$$

Чтоб проинтегрировать по области U, разобьём её на маленькие области («ячейки») — параллелепипеды, построенные на n векторах $\{\Delta x^1 \partial/\partial x^1, \ldots, \Delta x^n \partial/\partial x^n\}$, где $\{\Delta x^i\}$ — малые числа. Интеграл функции f по одной ячейке аппроксимируем значением f, умноженным на произведение

$$\Delta x^1 \Delta x^2 \ldots \Delta x^n = \tilde{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n(\Delta x^1 \partial/\partial x^1, \ldots, \Delta x^n \partial/\partial x^n).$$

Таким образом,

$$\int_{\text{ячейка}} f(x^1, \ldots, x^n) \cong \tilde{\omega}\,(\text{ячейка}). \tag{4.17}$$

Просуммировав по всем ячейкам и взяв предел при стремящемся к нулю размере ячейки, мы получим то, что будем называть *интегралом* $\tilde{\omega}$ *по* U:

◆ $$\int \tilde{\omega} \equiv \int f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \ldots dx^n, \tag{4.18}$$

где в правой части равенства стоит обычный интеграл дифференциального исчисления, а в левой части — наше новое обозначение. Поскольку левая часть не зависит от координат явно, то надо доказать, что она действительно не зависит от выбора системы координат на U. Мы ограничимся в нашем доказательстве случаем двух измерений, поскольку общий случай из него тривиально вытекает. Рассмотрим координаты λ и μ. Тогда

$$\int \tilde{\omega} \equiv \int f(\lambda, \mu)\tilde{d}\lambda \wedge \tilde{d}\mu = \int f(\lambda, \mu) d\lambda\, d\mu.$$

Если перейти к другим координатам x и y, то из определения $\tilde{d}\lambda$ как градиента и правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$\tilde{d}\lambda = \tilde{d}\lambda(x, y) = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\tilde{d}y,$$

$$\tilde{d}\mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{d}y.$$

Итак, мы получаем (напомним, что $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}x = 0$ в силу антисимметричности)

$$\begin{aligned}\tilde{d}\lambda \wedge \tilde{d}\mu &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\tilde{d}y\right) \wedge \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{d}x + \frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{d}y\right)\\ &= \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{d}y \wedge \tilde{d}x\\ &= \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Множитель перед $\tilde{d}x \wedge \tilde{d}y$ — это якобиан преобразования координат $\partial(\lambda, \mu)/\partial(x, y)$. Мы знаем из обычного интегрального исчисления, что именно так и должен преобразовываться элемент объёма. Таким образом, (λ, μ)-интеграл от f связан с. (x, y)-интегралом в точности так, как надо.

Однако значение $\int \tilde{\omega}$ не является совершенно нечувствительным к выбору исходной системы координат. Мы показали лишь то, что оно не меняется при преобразованиях координат, но уже в самой формуле (4.17) имеется неопределённость в знаке. На этой формуле основано само определение $\int \tilde{\omega}$, и, следуя ему, мы получим $\int \tilde{\omega}$ с другим знаком, если базис, отвечающий исходной координатной системе, будет иметь ориентацию, противоположную той, которую мы выбрали. Правая часть (4.17) останется той же — форма не зависит от выбора базиса, но функция f в левой части изменит знак. (Такое изменение знака не имеет ничего общего с только что рассмотренными координатными преобразованиями: там $d^n x$ умножилось бы на отрицательный якобиан, и всё было бы в порядке. Изменение знака происходит в самом исходном определении $\int \tilde{\omega}$ через обычный интеграл.) Избежать этой неопределённости нельзя. Общепринятый выход из положения — выбрать на U некоторую ориентацию, т. е. определить, какое из двух семейств базисов будет правозакрученным, и использовать в определении (4.17) только правые координатные системы. Итак, мы видим, что интеграл от $\tilde{\omega}$ по области U не зависит ни от чего, кроме ориентации.

Во всех этих рассуждениях существенную роль играло то обстоятельство, что U можно покрыть единой координатной системой. Можно ли распространить интеграл на всё M, которое может и не иметь глобальной системы координат? Ясно, что если две координатные карты имеют односвязную область перекрытия, то ориентация на одной карте однозначно индуцирует ориентацию на другой и интеграл по объединению двух областей корректно определён. Ясно, что охватить всё M таким образом можно тогда и только тогда, когда M ориентируемо. С этого момента мы ограничимся интегрированием на ориентируемых многообразиях; стоит, однако, заметить, что теория интегрирования была распространена де Рамом и на неориентируемые многообразия, и эта обобщённая теория имеет интересные физические приложения (см. статью Соркина (1977), указанную в библиографии в конце главы).

Для интегрирования, которое мы определили, всегда требуются формы максимальной степени: n-формы на n-мерном многообразии. Конечно, можно интегрировать и p-форму по p-мерному подмногообразию, если оно внутренне ориентируемо. Как связана ориентируемость подмногообразия S с ориентируемостью M? Предположим, что M ориентируемо и P — точка из S. Можно ли однозначно «индуцировать» ориентацию p-форм в точке P с помощью заданной n-формы $\tilde{\omega}$, которую мы считаем «правозакрученной», или «положительно ориентированной»? К сожалению, нет: сама по себе $\tilde{\omega}$ на S не значит ничего, ведь её сужение на S — тождественный нуль, так как $p < n$. Обычно делается следующее: форма $\tilde{\omega}$ редуцируется от n-формы до p-формы с помощью $n-p$ линейно-независимых «нормальных» (т. е. не являющихся касательными к S) векторов в точке P и, по определению, сужение p-формы

$$\tilde{\omega}(\bar{n}_1, \ldots, \bar{n}_{n-p})$$

на S считается правозакрученным. Это определение явно зависит от выбора векторов $\{\bar{n}_i\}$, включая и порядок, в котором они пронумерованы. Такой способ выбора ориентации называется *внешней ориентацией* на S в точке P. Мы приведём соответствующий пример позже, при доказательстве теоремы Стокса. Если оказывается возможным задать внешнюю ориентацию $\{\bar{n}_i, i = 1, \ldots, n - p\}$ на всём S непрерывно («непрерывно» означает и то, что векторы $\bar{n}_i$ всегда остаются линейно-

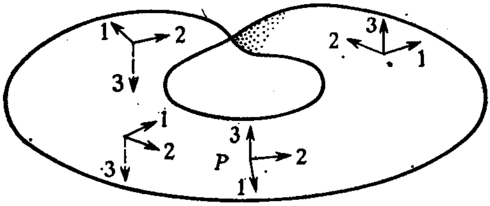

Рис. 4.5. Лист Мёбиуса в R^3. Проще всего представлять его сделанным из резины и плоско лежащим на странице, за исключением верхней части рисунка, где он один раз перекручен. Если репер в точке P "пронести" вдоль замкнутой кривой, изображённой штриховой линией, то вернувшийся репер нельзя перевести в исходный непрерывной деформацией, при которой векторы 1 и 2 остаются всё время на листе и все три вектора остаются линейно-независимыми.

независимыми и не являются касательными к S), то S называется *внешне ориентируемым.*

Ясно, что если существует какая-то ориентируемая открытая область многообразия M, содержащая S, то S либо ориен-

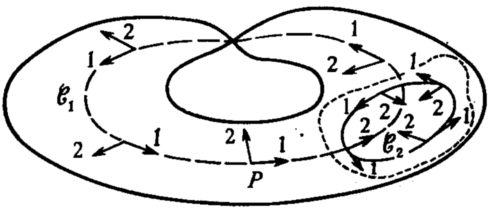

Рис. 4.6. Кривые на листе Мёбиуса. Кривая $\mathscr{C}_1$ не является внешне ориентируемой: если пару векторов 1 и 2 в точке P пронести вокруг ленты, как на рис. 4.5, то получившуюся после возвращения в начальную точку пару нельзя привести к исходному виду непрерывной деформацией, при которой вектор 1 остаётся всё время касательным к штриховой линии и оба вектора остаются линейно-независимыми. Кривая же $\mathscr{C}_2$ внешне ориентируема, поскольку у неё существует окрестность (пунктирная линия), в которой возможен согласованный выбор ориентации.

тируемо сразу и внутренне и внешне, либо не ориентируемо вовсе; если же такой области не существует, то для S может реализоваться лишь первая возможность, но не обе сразу. Например, рассмотрим лист (ленту) Мёбиуса в качестве двумерного подмногообразия R^3 (рис. 4.5) и кривую на этой ленте в качестве её одномерного подмногообразия (рис. 4.6). Зададим в некоторой точке P ленты правозакрученную тройку векторов, два из которых лежат на ленте, а третий вне неё. Обнесём эту тройку один раз вокруг ленты так, чтоб два вектора всегда оставались касательными к ней. Тогда направленный наружу вектор вернётся в точку P направленным в противоположную сторону — лента Мёбиуса не является внешне ориентируемой в R^3. Аналогично, рассмотрим пару векторов на ленте, один из которых касателен к кривой $\mathscr{C}_1$, а другой нет. После переноса вокруг кривой вектор, направленный наружу, окажется по другую сторону кривой. Хотя мы знаем, что наша кривая внутренне ориентируема, это свойство не зависит от того, в какое пространство она погружена, её нельзя внешне ориентировать в большем неориентируемом многообразии. Напротив, кривая $\mathscr{C}_2$ ориентируема и внутренне и внешне на ленте Мёбиуса, поскольку она не «чувствует» неориентируемости ленты — у $\mathscr{C}_2$ есть на ленте ориентируемая окрестность.

4.9. N-ВЕКТОРЫ, ДУАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СИМВОЛ $\varepsilon_{ij\dots k}$

До сих пор мы ограничивались рассмотрением антисимметричных тензоров типа $\binom{0}{N}$, но и для тензоров типа $\binom{N}{0}$ можно таким же образом построить грассманову алгебру. Антисимметричный тензор типа $\binom{N}{0}$ называется *N-вектором.* Также как и в случае форм, векторное пространство всех p-векторов в данной точке n-мерного многообразия имеет размерность $C^n{}_p$.

Заметим, что в любой точке есть четыре векторных пространства с одинаковой размерностью: пространства p-форм, $(n-p)$-форм, p-векторов и $(n-p)$-векторов все имеют размерность $C^n{}_p = C^n{}_{n-p}$ При соответствующих обстоятельствах можно строить 1-1-соответствия между различными парами этих пространств. Мы видели в § 2.29, что метрический тензор задает 1-1-соответствие между тензорами типа $\binom{0}{p}$ и типа $\binom{p}{0}$. Нетрудно видеть, что это отображение сохраняет антисимметричность, следовательно, оно обратимо отображает p-формы в p-векторы. Вне зависимости от того, задана метрика или нет, всякая n-форма объёма $\tilde{\omega}$ (т. е. n-форма, нигде не обращаются в нуль) обеспечивает существование отображения p-форм в $(n-p)$-векторы. Это отображение называется *отображением дуализации*, и сейчас мы покажем, как оно строится. (Не путайте это отображение, которое зависит от $\tilde{\omega}$ и каждому отдельному тензору типа $\binom{0}{p}$ сопо-