векторов, два из которых лежат на ленте, а третий вне неё. Обнесём эту тройку один раз вокруг ленты так, чтоб два вектора всегда оставались касательными к ней. Тогда направленный наружу вектор вернётся в точку P направленным в противоположную сторону — лента Мёбиуса не является внешне ориентируемой в R^3. Аналогично, рассмотрим пару векторов на ленте, один из которых касателен к кривой $\mathscr{C}_1$, а другой нет. После переноса вокруг кривой вектор, направленный наружу, окажется по другую сторону кривой. Хотя мы знаем, что наша кривая внутренне ориентируема, это свойство не зависит от того, в какое пространство она погружена, её нельзя внешне ориентировать в большем неориентируемом многообразии. Напротив, кривая $\mathscr{C}_2$ ориентируема и внутренне и внешне на ленте Мёбиуса, поскольку она не «чувствует» неориентируемости ленты — у $\mathscr{C}_2$ есть на ленте ориентируемая окрестность.

4.9. N-ВЕКТОРЫ, ДУАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СИМВОЛ $\varepsilon_{ij\ldots k}$

До сих пор мы ограничивались рассмотрением антисимметричных тензоров типа $\binom{0}{N}$, но и для тензоров типа $\binom{N}{0}$ можно таким же образом построить грассманову алгебру. Антисимметричный тензор типа $\binom{N}{0}$ называется *N-вектором.* Также как и в случае форм, векторное пространство всех p-векторов в данной точке n-мерного многообразия имеет размерность $C^n{}_p$.

Заметим, что в любой точке есть четыре векторных пространства с одинаковой размерностью: пространства p-форм, $(n-p)$-форм, p-векторов и $(n-p)$-векторов все имеют размерность $C^n{}_p = C^n{}_{n-p}$ При соответствующих обстоятельствах можно строить 1-1-соответствия между различными парами этих пространств. Мы видели в § 2.29, что метрический тензор задает 1-1-соответствие между тензорами типа $\binom{0}{p}$ и типа $\binom{p}{0}$. Нетрудно видеть, что это отображение сохраняет антисимметричность, следовательно, оно обратимо отображает p-формы в p-векторы. Вне зависимости от того, задана метрика или нет, всякая n-форма объёма $\tilde{\omega}$ (т. е. n-форма, нигде не обращаются в нуль) обеспечивает существование отображения p-форм в $(n-p)$-векторы. Это отображение называется *отображением дуализации,* и сейчас мы покажем, как оно строится. (Не путайте это отображение, которое зависит от $\tilde{\omega}$ и каждому отдельному тензору типа $\binom{0}{p}$ сопоставляет тензор типа $\binom{n-p}{0}$ и наоборот, с понятием дуального базиса один-форм, обсуждавшимся в гл. 2: там нет зависимости от $\tilde{\omega}$ и там *набор* из n тензоров типа $\binom{1}{0}$ отображается в *набор* из n тензоров типа $\binom{0}{1}$ и наоборот.)

Для данного q-вектора $\mathbf{T}$ с компонентами $T^{i\cdots k} = T^{[i\cdots k]}$ (q индексов) определим тензор $\tilde{A}$ следующим соотношением:

$$\blacklozenge \quad A_{j\ldots l} = \frac{1}{q!}\,\omega_{i\ldots kj\ldots l}T^{i\ldots k}. \tag{4.20}$$

Символически мы будем писать

$$\tilde{A} = \tilde{\omega}(\mathbf{T})$$

или проще

$$\blacklozenge \quad \tilde{A} = {}^*\mathbf{T} \tag{4.21}$$

Мы будем говорить, что $\tilde{A}$ *дуален к* $\mathbf{T}$ *относительно* $\tilde{\omega}$. Из (4.20) и антисимметричности $\omega_{i\cdots l}$ относительно перестановки любых двух индексов очевидно следует, что $\tilde{A}$ — антисимметричный тензор степени $n-q$ (это — число индексов $\tilde{\omega}$, оставшихся свободными после свёртки с q индексами $\mathbf{T}$). Таким образом, $\tilde{A}$ есть $(n-q)$-форма. Описанное отображение однозначно определяет $(n-q)$-форму для каждого q-вектора. То что оно обратимо, мы покажем позже, а сейчас продемонстрируем, что это отображение уже встречалось читателю при изучении *векторного произведения* в векторной алгебре трёхмерного эвклидова пространства.

Чтоб это понять, вспомним, что в эвклидовом пространстве обычно не различают векторы и один-формы: в декартовых координатах компоненты вектора и ассоциированной с ним один-формы совпадают. Рассмотрим два вектора $\bar{U}$ и $\bar{V}$ и отвечающие им один-формы $\tilde{U}$ и $\tilde{V}$. Два-форма $\tilde{U}\wedge\tilde{V}$ имеет $C_2^3 = 3$ независимых компонент $U_1V_2 - U_2V_1$, $U_1V_3 - U_3V_1$, $U_2V_3 - U_3V_2$. Вектор $\bar{U}\times\bar{V}$ имеет те же компоненты, и легко показать, что

$${}^*(\bar{U}\times\bar{V}) = \tilde{U}\wedge\tilde{V} \quad \text{(размерность 3)}. \tag{4.22}$$

Упражнение 4.10. Докажите (4.22), используя (4.20).

Это проливает свет на странные обстоятельства, связанные с векторным произведением: почему оно вообще существует, почему оно не существует в размерностях, не равных трём (только в случае размерности 3 отображение дуализации превращает векторы в два-формы), и почему $\bar{U}\times\bar{V}$ — «аксиальный» вектор. Последнее объясняется тем, что в эвклидовом пространстве принято определять $\tilde{\omega}$ так, чтобы базису

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ соответствовал положительный объём. Если ориентация базиса меняется, то то же происходит и со знаком $\tilde{\omega}$, а следовательно, и со знаком $\bar{U} \times \bar{V}$ (который зависит от знака $\tilde{\omega}$, поскольку с помощью $\tilde{\omega}$ вектор $\bar{U} \times \bar{V}$ отображается в форму $\tilde{U} \wedge \tilde{V}$, знак которой не должен меняться). Вот векторное произведение и меняет знак при отражении координат.

Соответствие между T и $^*\mathsf{T}$ обратимо, поскольку они имеют по одинаковому числу компонент. (Иными словами, свёртка T с $\tilde{\omega}$ в (4.20) не приводит к потере информации, содержащейся в T поскольку T уже был антисимметричен по всем своим индексам.) Таким образом, для данной p-формы $\tilde{A}$ существует *единственный* $(n-p)$-вектор T, такой что $\tilde{A} = {}^*\mathsf{T}$ Это можно формально записать, введя n-вектор $\omega^{i \dots k}$, обратный к $\tilde{\omega}$, определяемый соотношением

$$\omega^{i \dots k}\omega_{i \dots k} = n!. \tag{4.23}$$

Множитель $n!$ необходим, поскольку сумма в (4.23) содержит $n!$ одинаковых слагаемых $\omega^{123 \dots n}\omega_{123 \dots n} = \omega^{213 \dots n}\omega_{213 \dots n} = \dots$; он обеспечивает нужную нормировку:

$$\omega^{123 \dots n} = \frac{1}{\omega_{123 \dots n}}. \tag{4.24}$$

Мы говорим, что тензор S *дуален* к p-форме $\tilde{B}$ *относительно* $\tilde{\omega}$, и пишем

$$\blacklozenge \quad \mathsf{S} = {}^*\tilde{B}, \tag{4.25}$$

если

$$\blacklozenge \quad S^{i \dots k} = \frac{1}{p!}\omega^{l \dots m i \dots k}B_{l \dots m}. \tag{4.26}$$

То что два введённых отображения дуализации взаимно обратны, мы покажем сначала на примере числовой функции. Функция f, рассматриваемая как 0-вектор, имеет дуальную n-форму $f\tilde{\omega}$ Этой n-форме дуален 0-вектор

$$^*(f\tilde{\omega}) = \frac{1}{n!}\omega^{l \dots m}(f\omega_{l \dots m}) = f,$$

Итак, мы доказали, что $^{**}f = f$.

В общем случае рассуждаем так. Начнём с p-формы $\tilde{B}$ и определим $(n-p)$-вектор S с помощью (4.26). Применим к S оператор дуализации:

$$\begin{aligned}
({}^*\mathsf{S})_{j \dots l} &= \frac{1}{(n-p)!}\omega_{i \dots kj \dots l}S^{i \dots k} \\
&= \frac{1}{p!(n-p)!}\omega_{i \dots kj \dots l}\omega^{r \dots si \dots k}B_{r \dots s} \\
&= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!(n-p)!}\omega_{i \dots kj \dots l}\omega^{i \dots kr \dots s}B_{r \dots s}.
\end{aligned}$$

Чтобы получить последнюю строчку, надо было переставить каждый из $n-p$ индексов $i \ldots k$ со всеми p индексами $r \ldots s$, что и дало $n-p$ множителей $(-1)^p$. Дадим индексам $(j \ldots l)$ конкретные значения, например $(1 \ldots p)$. (Понятно, что несущественно, как именно они «называются».) Тогда в сумме (при фиксированных $(r \ldots s)$)

$$\omega_{i \ldots k1 \ldots p}\omega^{i \ldots kr \ldots s}$$

индексы $i \ldots k$ надо выбирать из множества $(p+1, \ldots, n)$. Таким образом, в сумме получится $(n-p)!$ ненулевых слагаемых и все они будут равны друг другу, в точности как в (4.23); следовательно,

$$\omega_{i \ldots k1 \ldots p}\omega^{i \ldots kr \ldots s} = (n-p)!\, \omega_{p+1 \ldots n1 \ldots p}\omega^{p+1 \ldots nr \ldots s}.$$

Далее, это равно нулю во всех случаях, когда $(r \ldots s)$ не есть перестановка из $(1 \ldots p)$, ибо тогда у второго ω будут иметься совпадающие индексы. В сумме по $(r \ldots s)$

$$\omega^{p+1 \ldots nr \ldots s}B_{r \ldots s}$$

есть $p!$ ненулевых слагаемых, опять-таки равных друг другу. Итак, мы получаем

$$\omega^{p+1 \ldots nr \ldots s}B_{r \ldots s} = p!\, \omega^{p+1 \ldots n1 \ldots p}B_{1 \ldots p}.$$

Вместе эти формулы дают

$$({}^*\mathbf{S})_{1 \ldots p} = (-1)^{p(n-p)}\omega_{p+1 \ldots n1 \ldots p}\omega^{p+1 \ldots n1 \ldots p}B_{1 \ldots p}.$$

Но из (4.24) вытекает, что

$$\omega_{p+1 \ldots n1 \ldots p}\omega^{p+1 \ldots n1 \ldots p} = 1;$$

следовательно,

$$({}^*\mathbf{S})_{1 \ldots p} = (-1)^{p(n-p)}B_{1 \ldots p}.$$

Поскольку метки $1 \ldots p$ могли представлять произвольные индексы, то мы доказали, что

◆ $$^{**}\tilde{B} = (-1)^{p(n-p)}\tilde{B}. \tag{4.27a}$$

Аналогично если бы мы начали с q-вектора $\mathbf{T}$ то получили бы

◆ $$^{**}\mathbf{T} = (-1)^{q(n-q)}\mathbf{T}. \tag{4.27b}$$

Заметим, что при нечётных n множитель $(-1)^{p(n-p)}$ всегда равен $+1$.

Как мы уже раньше отмечали, метрика отображает p-формы в p-векторы. В сочетании с отображением дуализации это даёт отображение p-форм в $(n-p)$-формы, или q-векторов в $(n-q)$-векторы. Обычно это отображение по-прежнему обозначается просто через *. Нужна, правда, известная бдительность в отношении знаков в случае, если метрика индефинитна (когда, как в теории относительности, некоторые длины положительны, а некоторые отрицательны). В деталях мы обсудим это попозже. Один пример использования такой операции дуальности дан в упр. 5.13.

В алгебре форм часто бывает удобно употреблять антисимметричные *символы Леви-Чивиты*

$$◆\quad \varepsilon_{ij\ldots k} = \varepsilon^{ij\ldots k} \equiv \begin{cases} +1, & \text{если } ij\ldots k \text{ — четная перестановка чисел } 1, 2, \ldots, n; \\ -1, & \text{если } ij\ldots k \text{ — нечетная перестановка чисел } 1, 2, \ldots, n; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.28}$$

Например, форма $\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \tilde{d}x^3$ на трёхмерном многообразии будет иметь компоненты ε_{ijk} в системе координат (x^1, x^2, x^3) и компоненты $h\varepsilon_{ijk}$ в любой другой системе координат, где h — некоторая функция. Предположим, что n-форма объёма $\tilde{\omega}$ имеет компоненты

$$\omega_{ij\ldots k} = f\varepsilon_{ij\ldots k}, \tag{4.29}$$

где f — некоторая функция. Тогда обратный к ней n-вектор имеет компоненты

$$\omega^{ij\ldots k} = \frac{1}{f}\varepsilon^{ij\ldots k}. \tag{4.30}$$

4.10. ТЕНЗОРНЫЕ ПЛОТНОСТИ

Нами принята та точка зрения, что любая ненулевая n-форма на n-мерном многообразии определяет элемент объёма. В реальных задачах подчас встречается сразу несколько таких n-форм. (Примером может служить течение идеальной жидкости, рассматриваемое в гл. 5. На трёхмерном многообразии эвклидова пространства есть три физически существенные три-формы: одна, интеграл от которой задаёт объём области, другая — массу, а третья — некоторую сохраняющуюся величину, связанную с завихрённостью.) Поэтому иногда удобнее соотносить все такие формы с одной *зависящей от выбора системы координат* n-формой $\tilde{d}x^1 \wedge \tilde{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \tilde{d}x^n$, компоненты которой суть просто $\varepsilon_{ij\ldots k}$. Если $\tilde{\omega}$ — рассматриваемая n-форма, то соотношение (4.29), пере-