то, что с T^{AB} надо обращаться как с тензором типа $\binom{2}{0}$ при вычислении производной Ли по направлению $\bar{U}$, поскольку $\bar{U}$ — это вектор в исходном многообразии, а не в фазовом пространстве.) Как и раньше, если $\bar{Y}$ — решение, то и $\pounds_{\bar{U}}\bar{Y}$ — решение. (Опять то же замечание: это производная в исходном многообразии, а не в фазовом пространстве.) Итак, определим канонический *$\bar{U}$-импульс* формулой

$$\blacklozenge \quad P_{\bar{U}}(\bar{Y}) = \tilde{\omega}(\pounds_{\bar{U}}\bar{Y}, \bar{Y}). \tag{5.45}$$

Читатель может на простых примерах, вроде того что дан в упр. 5.8, убедиться[1], что обычные сохраняющиеся величины действительно так получаются.

Хотя наше обсуждение ограничивалось системами с конечным числом (N) степеней свободы, развитый формализм прямо обобщается на непрерывные системы, такие как системы, описываемые волновым уравнением. Знакомый с уравнением Клейна — Гордона читатель может узнать симплектическое скалярное произведение: интеграл от сохраняющейся плотности тока $\psi^*\dot{\psi} - \psi\dot{\psi}^*$ как раз и есть (с точностью до постоянных множителей) $\tilde{\omega}(\psi^*, \psi)$. Обсуждение канонических сохраняющихся величин для случая волн в жидкости с приложением к вопросам устойчивости можно найти в работе Friedman & Schutz (1978), указанной в библиографии в конце главы.

5.10. УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА И РАССЛОЕНИЯ

В § 5.4 мы определили фазовое пространство как многообразие с координатами p и q. Это определение таит в себе множество важных и интересных структур. Пусть динамическая система имеет N координат $\{q^i\}$, отвечающих её N степеням свободы. Они определяют многообразие M, называемое *конфигурационным пространством*, и эволюция динамической системы во времени описывается кривой $q^i(t)$ в M. Функция Лагранжа $\mathscr{L}$ зависит от q^i и $\mathrm{d}q^i/\mathrm{d}t$ и, следовательно, является функцией на касательном расслоении TM. Покажем, что импульс

$$p_i = \partial\mathscr{L}/\partial(q^i_{,t}) \tag{5.46}$$

есть поле один-форм на M, т. е. сечение кокасательного расслоения T^*M. Мы покажем это, установив, как преобразуется импульс при замене координат. Введём на M новые координаты

$$Q^{i'} = Q^{i'}(q^i). \tag{5.47}$$

[1] Это далеко не просто. — *Прим. перев.*

Тогда новые импульсы будут равны

$$P_{j'} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q^{j'}_{,t}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^{(k)}_{,t}} \frac{\partial q^{(k)}_{,t}}{\partial Q^{j'}_{,t}}. \qquad (5.48)$$

Далее, как $q^k{}_{,t}$, так и $Q^{l'}{}_{,t}$, в каждой точке P являются элементами слоя над этой точкой, и при замене переменных (5.47) координаты в этом слое соответственно преобразуются. А именно, если $\bar{V}$ — вектор в P, то для его компонент мы имеем

$$V^{l'} = \Lambda^{l'}_k V^k, \quad V^k = \Lambda^k_{j'} V^{j'}.$$

С тем же успехом формула применима и к вектору скорости $q^k{}_{,t}$:

$$q^k_{,t} = \Lambda^k_{j'} Q^{j'}_{,t} \Rightarrow \frac{\partial q^k_{,t}}{\partial Q^{j'}_{,t}} = \Lambda^k_{j'}.$$

Подставив это соотношение в (5.48), получаем

$$P_{j'} = \Lambda^k_{j'} p_k, \qquad (5.49)$$

и, следовательно, импульс действительно является одинформой.

Итак, мы видим, что фазовое пространство с координатами $\{q^i, p_i\}$ есть не что иное, как *кокасательное расслоение* T^*M, а функция Гамильтона — функция на этом расслоении. Более того, симплектическая форма

$$\tilde{\omega} = \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}p_i$$

(суммирование подразумевается) не зависит от выбора координат на M. Пусть произведено преобразование

$$\begin{aligned} Q^{j'} &= Q^{j'}(q^i) \Rightarrow \tilde{d}Q^{j'} = \Lambda^{j'}_i \tilde{d} q^i, \\ P_{j'} &= \Lambda^k_{j'} p_k \Rightarrow \tilde{d} P_{j'} = \Lambda^k_{j',l} p_k \tilde{d} q^l + \Lambda^k_{j'} \tilde{d} p_k. \end{aligned} \qquad (5.50)$$

(Напомним, что оператор $\tilde{d}$ действует на T^*M, а не на M и что $\Lambda^k{}_{j'}$ — функции, зависящие лишь от координат M.) Тогда

$$\tilde{d}Q^{j'} \wedge \tilde{d}P_{j'} = \Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j',l} p_k \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^l + \Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j'} \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}p_k. \qquad (5.51)$$

В то же время

$$\Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j'} = \delta^k_i \Rightarrow \Lambda^{j'}_i \Lambda^k_{j',l} = -\Lambda^{j'}_{i,l} \Lambda^k_{j'},$$

и (5.51) принимает вид

$$\tilde{d}Q^{j'} \wedge \tilde{d}P_{j'} = -\Lambda^{j'}_{i,l} \Lambda^k_{j'} p_k \tilde{d} q^i \wedge \tilde{d}q^l + \tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}p_i.$$

Первый член в правой части обращается в нуль, поскольку

$$\Lambda^{l'}_{i,\,l} = \frac{\partial^2 Q^{l'}}{\partial q^i \partial q^l}$$

симметрично по i и l, а свёртывается с антисимметричной формой $\tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^l$. Таким образом, от выбора координат на M форма $\tilde{\omega}$ не зависит и является *естественной* структурой на кокасательном расслоении T^*M. Кроме того, T^*M всегда ориентируемо, поскольку форма объёма $\tilde{\sigma}$, определённая в упр. 5.7(b), нигде не обращается в нуль.

Очевидно, что хотя в нашем примере мы обращались с расслоенной структурой как с тривиальной (т. е. как с прямым произведением q- и p-пространств), можно рассматривать и нетривиальные многообразия M и расслоения T^*M, для которых все приведённые выше координатные формулы имеют смысл уже лишь локально. Даже в таком простом примере, как шарик, движущийся по поверхности сферы, мы имеем фазовое пространство с нетривиальной расслоенной структурой, как было отмечено в § 2.11.

C. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

5.11. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА НА ЯЗЫКЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Выпишем уравнения Максвелла в их традиционном виде в системе единиц с $c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{J}, \tag{5.52a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0, \tag{5.52b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5.52c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{5.52d}$$

При этом мы, конечно же, использовали операторы ротора и дивергенции в обычном трёхмерном плоском пространстве.

Теперь мы хотим показать, что эти уравнения можно записать, пользуясь лишь понятиями метрики и внешнего дифференцирования. Начнём с того, что перепишем уравнения в их релятивистски-инвариантном виде[1], введя *два-форму Фа-*

[1] Для читателя, который это не знал или забыл, напомним, что уравнения Максвелла правильно описывают распространение света, а специальная теория относительности как раз и была изобретена для объяснения некоторых свойств света; поэтому уравнения Максвелла *уже* релятивистские. Всё, что мы здесь делаем, — это придаём им подходящую форму.