Первый член в правой части обращается в нуль, поскольку

$$\Lambda^{l'}_{i,\,l} = \frac{\partial^2 Q^{l'}}{\partial q^i \partial q^l}$$

симметрично по i и l, а свёртывается с антисимметричной формой $\tilde{d}q^i \wedge \tilde{d}q^l$. Таким образом, от выбора координат на M форма $\tilde{\omega}$ не зависит и является *естественной* структурой на кокасательном расслоении T^*M. Кроме того, T^*M всегда ориентируемо, поскольку форма объёма $\tilde{\sigma}$, определённая в упр. 5.7(b), нигде не обращается в нуль.

Очевидно, что хотя в нашем примере мы обращались с расслоенной структурой как с тривиальной (т. е. как с прямым произведением q- и p-пространств), можно рассматривать и нетривиальные многообразия M и расслоения T^*M, для которых все приведённые выше координатные формулы имеют смысл уже лишь локально. Даже в таком простом примере, как шарик, движущийся по поверхности сферы, мы имеем фазовое пространство с нетривиальной расслоенной структурой, как было отмечено в § 2.11.

C. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

5.11. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА НА ЯЗЫКЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Выпишем уравнения Максвелла в их традиционном виде в системе единиц с $c = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{J}, \tag{5.52a}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} = 0, \tag{5.52b}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{5.52c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{5.52d}$$

При этом мы, конечно же, использовали операторы ротора и дивергенции в обычном трёхмерном плоском пространстве.

Теперь мы хотим показать, что эти уравнения можно записать, пользуясь лишь понятиями метрики и внешнего дифференцирования. Начнём с того, что перепишем уравнения в их релятивистски-инвариантном виде [1)], введя *два-форму Фа-*

[1)] Для читателя, который это не знал или забыл, напомним, что уравнения Максвелла правильно описывают распространение света, а специальная теория относительности как раз и была изобретена для объяснения некоторых свойств света; поэтому уравнения Максвелла *уже* релятивистские. Всё, что мы здесь делаем, — это придаём им подходящую форму.

радея $\tilde{F}$ с компонентами

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.53}$$

(Здесь, как и в § 2.31, греческие индексы пробегают t, x, y, z.)

Упражнение 5.9. Докажите, что при пространственных вращениях $F_{\mu\nu}$ преобразуются таким образом, что **E** и **B** преобразуются как трёхмерные векторы.

С помощью тензора Фарадея уравнениям Максвелла можно придать чрезвычайно простой вид. Например, четыре уравнения (5.52b, c) записываются как

$$F_{[\mu\nu,\,\gamma]} = 0 \Leftrightarrow \tilde{d}\tilde{F} = 0, \tag{5.54}$$

где квадратные скобки обозначают антисимметризацию.

Упражнение 5.10. (a) Докажите, что в (5.54) содержится четыре линейно-независимых уравнения.

(b) Докажите эквивалентность уравнений (5.54) и (5.52b, c), воспользовавшись явным выражением (5.53) для компонент $\tilde{F}$.

Теперь перейдем к оставшимся уравнениям. Если мы введём метрику специальной теории относительности, имеющую в нашей системе координат следующие компоненты:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.55}$$

то мы можем определить антисимметричный тензор **F** типа $\binom{2}{0}$:

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta},$$

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.56}$$

Упражнение 5.11. Докажите формулу (5.56).

Теперь оставшиеся уравнения можно записать так:

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 4\pi J^{\mu}, \tag{5.57}$$

где мы ввели 4-вектор тока с компонентами $\{J^t = \rho,\ J^i = (\mathbf{J})^i$ для $i = x,\ y,\ z\}$.

Упражнение 5.12. Докажите, что четыре уравнения (5.57) — это то же самое, что (5.52a—d).

До сих пор мы были привязаны к лоренцевым координатам, поскольку, хотя (5.54) и не зависит от координат, (5.57) не представляет собой тензорного равенства, верного в любой системе координат (вспомните упр. 4.15). С другой стороны, в упр. 4.23 мы видели, как определить дивергенцию антисимметричного $\binom{2}{0}$-тензора, если у нас есть форма объёма. Поскольку у нас есть метрика и $\{\partial/\partial t,\ \partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z\}$ образуют в этой метрике ортонормированный базис, то выделенная форма объёма имеет вид

$$\tilde{\omega} = \tilde{d}t \wedge \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z.$$

Дальнейшие рассмотрения проведем в форме упражнения.

Упражнение 5.13. (a) Определим два-форму $^*\tilde{F}$ как свёртку

$$^*\tilde{F} \equiv \frac{1}{2}\tilde{\omega}(F), \tag{5.58}$$

т. е.

$$(^*\tilde{F})_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\alpha\beta}.$$

Конечно же, это введённая в гл. 4 дуальная к $\mathbf{F}$ форма. Выразите компоненты $(^*\tilde{F})_{\mu\nu}$ через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

(b) Определите три-форму $^*\tilde{J}$ как свёртку

$$^*\tilde{J} \equiv \tilde{\omega}(\bar{J}) \tag{5.59}$$

и покажите, что (5.57) эквивалентно

$$\tilde{d}(^*\tilde{F}) = 4\pi\, {}^*\tilde{J}. \tag{5.60}$$

Из упр. 4.23 следует, что это можно переписать так:

$$\operatorname{div}_{\tilde{\omega}}\mathbf{F} = 4\pi\bar{J}. \tag{5.61}$$

Обратите внимание на то, как похоже выглядят две части уравнений Максвелла в нашей новой записи:

- $\tilde{d}\tilde{F} = 0, \qquad (5.54)$
- $\tilde{d}\,{}^*\tilde{F} = 4\pi\,{}^*\tilde{J}. \qquad (5.60)$

Также заметьте, что теперь они представлены в бескоординатном виде и, следовательно, выглядят так же на *любом* многообразии с метрикой (метрика была нужна, чтоб получить $^*\tilde{F}$ из $\tilde{F}$). Сходство между (5.54) и (5.60) в уравнениях Максвелла довольно глубокое. В самом деле, действие операции * на $\tilde{F}$ сводится просто к взаимной замене **E** и **B** (см. упр. 5.13(a)), а $\tilde{J}$ — это плотность *электрического* тока. Если бы существовали магнитные монополи, то у нас было бы два тока $\tilde{J}_e$ и $\tilde{J}_m$ и уравнения Максвелла приняли бы симметричную форму

$$\tilde{d}\tilde{F} = 4\pi^*\tilde{J}_m, \qquad \tilde{d}^*\tilde{F} = 4\pi^*\tilde{J}_e. \tag{5.62}$$

Упражнение 5.14. (a) Докажите (5.62).

(b) Докажите с помощью внешнего дифференцирования, что уравнение (5.60) гарантирует сохранение заряда, т. е. что

$$\operatorname{div}(\vec{J}) = 0. \tag{5.63}$$

Упражнение 5.15. Установите теорему об изменении полного заряда, действуя следующим образом.

(a) Возьмите *произвольную* ориентированную трёхмерную гиперповерхность $\mathscr{H}$ и ограничьте на неё (5.60). Докажите, что операция ограничения коммутирует с внешним дифференцированием, т. е.

$$\tilde{d}\,[(^*\tilde{F})|_{\mathscr{H}}] = (\tilde{d}\,^*\tilde{F})|_{\mathscr{H}}.$$

(b) Возьмите на $\mathscr{H}$ какую-нибудь область $\mathscr{D}$ с границей $\partial\mathscr{D}$. Проинтегрируйте ограничение (5.60) по $\mathscr{D}$ и, воспользовавшись теоремой Стокса, покажите, что (соответствующие ограничения подразумеваются)

$$\int_{\mathscr{D}} {}^*\tilde{J} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathscr{D}} {}^*\tilde{F}.$$

(c) Докажите, что в случае, когда $\mathscr{H}$ — гиперповерхность $t = \text{const}$ в пространстве Минковского, а $\partial\mathscr{D}$ — сфера, полный заряд, заключённый в $\mathscr{D}$, получается как интеграл от нормальной компоненты электрического поля по $\partial\mathscr{D}$.

5.12. ЗАРЯД И ТОПОЛОГИЯ

Поскольку теперь мы можем говорить об уравнениях Максвелла на любом многообразии с метрикой, стоит упомянуть о двух попытках разрешить головоломный вопрос: «Что есть заряд?», при помощи такого ответа: «Заряд — это топология». Первое объяснение, принадлежащее Дж. Уилеру (1962),