Также заметьте, что теперь они представлены в бескоординатном виде и, следовательно, выглядят так же на *любом* многообразии с метрикой (метрика была нужна, чтоб получить $^*\tilde{F}$ из $\tilde{F}$). Сходство между (5.54) и (5.60) в уравнениях Максвелла довольно глубокое. В самом деле, действие операции $*$ на $\tilde{F}$ сводится просто к взаимной замене **E** и **B** (см. упр. 5.13(a)), а $\tilde{J}$ — это плотность *электрического* тока. Если бы существовали магнитные монополи, то у нас было бы два тока $\tilde{J}_e$ и $\tilde{J}_m$ и уравнения Максвелла приняли бы симметричную форму

$$\tilde{d}\tilde{F} = 4\pi{}^*\tilde{J}_m, \quad \tilde{d}{}^*\tilde{F} = 4\pi{}^*\tilde{J}_e. \tag{5.62}$$

Упражнение 5.14. (a) Докажите (5.62).

(b) Докажите с помощью внешнего дифференцирования, что уравнение (5.60) гарантирует сохранение заряда, т. е. что

$$\operatorname{div}(\tilde{J}) = 0. \tag{5.63}$$

Упражнение 5.15. Установите теорему об изменении полного заряда, действуя следующим образом.

(a) Возьмите *произвольную* ориентированную трёхмерную гиперповерхность $\mathscr{H}$ и ограничьте на неё (5.60). Докажите, что операция ограничения коммутирует с внешним дифференцированием, т. е.

$$\tilde{d}\left[({}^*\tilde{F})|_{\mathscr{H}}\right] = (\tilde{d}\,{}^*\tilde{F})|_{\mathscr{H}}.$$

(b) Возьмите на $\mathscr{H}$ какую-нибудь область $\mathscr{D}$ с границей $\partial\mathscr{D}$. Проинтегрируйте ограничение (5.60) по $\mathscr{D}$ и, воспользовавшись теоремой Стокса, покажите, что (соответствующие ограничения подразумеваются)

$$\int_{\mathscr{D}} {}^*\tilde{J} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathscr{D}} {}^*\tilde{F}.$$

(c) Докажите, что в случае, когда $\mathscr{H}$ — гиперповерхность $t = \text{const}$ в пространстве Минковского, а $\partial\mathscr{D}$ — сфера, полный заряд, заключённый в $\mathscr{D}$, получается как интеграл от нормальной компоненты электрического поля по $\partial\mathscr{D}$.

5.12. ЗАРЯД И ТОПОЛОГИЯ

Поскольку теперь мы можем говорить об уравнениях Максвелла на любом многообразии с метрикой, стоит упомянуть о двух попытках разрешить головоломный вопрос: «Что есть заряд?», при помощи такого ответа: «Заряд — это топология». Первое объяснение, принадлежащее Дж. Уилеру (1962), чрезвычайно просто. Рассмотрим рис. 5.2, на котором изображена гиперповерхность $t = \text{const}$ некоего гипотетического пространства-времени. Сплошные линии на рисунке — это интегральные кривые поля **E**. Никаких зарядов нигде нет, и эти интегральные кривые либо замкнуты (концы линий, «продетых» сквозь ручку, соединяются между отверстиями), либо бесконечны (концы линий остаются свободными). Посмотрим, что́ обнаружит экспериментатор, измеряющий **E** на сфере S,

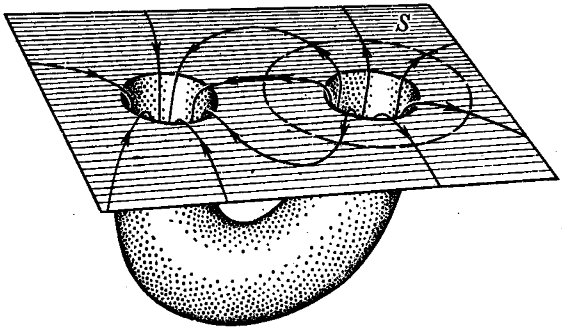

Рис. 5.2. "Червоточина", или "ручка", прикреплённая к трёхмерному многообразию (одна размерность на рисунке не представлена). Силовые линии могут пронизывать ручку, выходить наружу и вновь нырять в неё, в результате чего каждое отверстие выглядит заряженным, хотя зарядов в пространстве нет.

окружающей одно из отверстий; интеграл $\int_S \tilde{F}|_S$, конечно же, в нуль не обратится (всюду на S поле направлено наружу), и он скажет, что отверстие имеет положительный заряд. В точности так же сфера вокруг другого отверстия даст отрицательный заряд, равный по величине предыдущему. (Вычисления упр. 5.15 здесь силы не имеют, поскольку S не делит многообразие на внешность и внутренность, см. рис. 4.10.) Итак, мы построили модель «заряда без заряда», получив заодно объяснение того, почему положительный и отрицательный заряды равны между собой. У такой модели есть, однако, два изъяна: во-первых, никому пока не удалось получить решение, скажем, уравнений Эйнштейна с похожей геометрией пространства-времени; во-вторых, представление о том, что два заряда (которые могут быть чрезвычайно сильно удалены друг от друга) всегда соединены собственной специальной «ручкой», неудовлетворительно в философском плане.

Второе, более изощрённое объяснение использует многообразие, сделанное неориентируемым при помощи специальной конструкции ручки. Оно принадлежит Соркину (1977) (см. библиографию в конце гл. 4). В его модели оба отверстия имеют одинаковые по величине *и знаку* заряды, и можно себе представить, что они близко сомкнуты и образуют нечто, выглядящее для внешнего наблюдателя как один заряд, равный удвоенному заряду каждого отверстия. Здесь упр. 5.15 опять не работает, поскольку многообразие неориентируемо. Такая модель свободна от второго изъяна модели Уилера — но не от первого! И ни одна из моделей не объясняет, почему два произвольных (не имеющих друг к другу отношения) заряда должны быть равны. Несмотря на это, приведённые примеры иллюстрируют становящуюся все более и более несомненной идею, что в теоретической физике есть и ещё что-то, кроме локальных дифференциальных уравнений!

5.13. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ

Существование «вектор-потенциала» для уравнений Максвелла прямо следует из (5.54). Поскольку $\tilde{F}$ — замкнутая два-форма, то существует один-форма $\tilde{A}$, такая что

$$\blacklozenge \quad \tilde{F} = d\tilde{A} \tag{5.64}$$

в некоторой окрестности каждой точки. С помощью метрики этой один-форме можно сопоставить вектор, который и называется *вектор-потенциалом.* Более естественно, конечно же, пользоваться один-формой потенциала. Заметим, что $\tilde{A}$ определена не однозначно: $\tilde{A}' = \tilde{A} + \tilde{d}f$ при любой функции f даёт по формуле (5.64) то же самое $\tilde{F}$. Такая замена называется *калибровочным преобразованием.* Отметим также, что если существуют магнитные монополи, то $\tilde{d}\tilde{F}$ не может всюду обращаться в нуль. Как следует из нашего обсуждения точных форм в гл. 4, в этом случае $\tilde{A}$ можно определить лишь на простых областях, не содержащих магнитных монополей. В частности, в той области пространства-времени, где содержится мировая линия магнитного монополя, *нельзя* всюду согласованно определить один-форму потенциала.

Упражнение 5.16. (а) Покажите, что если существует один-форма потенциала $\tilde{A}$, то на нерелятивистском языке ей соответствуют скалярный потенциал φ и вектор-потенциал A^i (трёхмерный), задаваемые формулами $\varphi = A_0$, A^i (вектор-потенциал) $= -A_i$ (один-форма), где индексы относятся к той же системе координат, что и в (5.52).

(b) Выясните, как определённые в (а) потенциалы φ и A^i преобразуются при калибровочных преобразованиях.

(c) Чтобы проиллюстрировать сложности с один-формой потенциала, вызываемые наличием магнитных монополей, рассмотрим случай, когда заряды есть, а монополей *нет*, но один-форма потенциала $\tilde{\alpha}$ для $\tilde{F}$ определена равенством

$$^*\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{\alpha},$$