себе представить, что они близко сомкнуты и образуют нечто, выглядящее для внешнего наблюдателя как один заряд, равный удвоенному заряду каждого отверстия. Здесь упр. 5.15 опять не работает, поскольку многообразие неориентируемо. Такая модель свободна от второго изъяна модели Уилера — но не от первого! И ни одна из моделей не объясняет, почему два произвольных (не имеющих друг к другу отношения) заряда должны быть равны. Несмотря на это, приведённые примеры иллюстрируют становящуюся все более и более несомненной идею, что в теоретической физике есть и ещё что-то, кроме локальных дифференциальных уравнений!

5.13. ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛ

Существование «вектор-потенциала» для уравнений Максвелла прямо следует из (5.54). Поскольку $\tilde{F}$ — замкнутая два-форма, то существует один-форма $\tilde{A}$, такая что

$$\blacklozenge \quad \tilde{F} = \tilde{d}\tilde{A} \tag{5.64}$$

в некоторой окрестности каждой точки. С помощью метрики этой один-форме можно сопоставить вектор, который и называется *вектор-потенциалом*. Более естественно, конечно же, пользоваться один-формой потенциала. Заметим, что $\tilde{A}$ определена не однозначно: $\tilde{A}' = \tilde{A} + \tilde{d}f$ при любой функции f даёт по формуле (5.64) то же самое $\tilde{F}$. Такая замена называется *калибровочным преобразованием*. Отметим также, что если существуют магнитные монополи, то $\tilde{d}\tilde{F}$ не может всюду обращаться в нуль. Как следует из нашего обсуждения точных форм в гл. 4, в этом случае $\tilde{A}$ можно определить лишь на простых областях, не содержащих магнитных монополей. В частности, в той области пространства-времени, где содержится мировая линия магнитного монополя, *нельзя* всюду согласованно определить один-форму потенциала.

Упражнение 5.16. (a) Покажите, что если существует один-форма потенциала $\tilde{A}$, то на нерелятивистском языке ей соответствуют скалярный потенциал φ и вектор-потенциал A^i (трёхмерный), задаваемые формулами $\varphi = A_0$, A^i (вектор-потенциал) $= -A_i$ (один-форма), где индексы относятся к той же системе координат, что и в (5.52).

(b) Выясните, как определённые в (a) потенциалы φ и A^i преобразуются при калибровочных преобразованиях.

(c) Чтобы проиллюстрировать сложности с один-формой потенциала, вызываемые наличием магнитных монополей, рассмотрим случай, когда заряды есть, а монополей *нет*, но один-форма потенциала $\tilde{\alpha}$ для $\tilde{F}$ определена равенством

$$^*\tilde{F} = \tilde{d}\tilde{\alpha},$$

(Вследствие дуальности магнитных и электрических полей относительно операции* присутствие электрического заряда влечёт для $\tilde{\alpha}$ те же сложности, что и присутствие магнитного для $\tilde{A}$.) Запишите уравнение Максвелла через $\tilde{\alpha}$ и покажите, что $\tilde{\alpha}$ существует лишь в тех областях, в которых нет заряда и которые могут быть стянуты в точку. Сделайте это, найдя $\tilde{\alpha}$ явно для случая одиночного статического изолированного заряда q.

5.14. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ: ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Как известно, плоские электромагнитные волны движутся со скоростью света. Рассмотрим специальный тензор Фарадея $F^{\alpha\beta}$, все компоненты которого зависят лишь от $u \equiv t - x$ (напомним, что мы используем систему единиц с $c = 1$):

$$F^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}(t - x) = A^{\alpha\beta}(u). \qquad (5.65)$$

При каких условиях он удовлетворяет уравнениям для пустого пространства $\mathrm{d}\tilde{F} = 0$, $\mathrm{d}{}^*\tilde{F} = 0$? Из (5.65) следует, что

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{F} = \tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}\tilde{\mathrm{d}}x^{\mu} \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}\right) = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{d}}(F_{\mu\nu})\tilde{\mathrm{d}}x^{\mu} \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}$$

$$= \frac{1}{2}(\mathrm{d}A_{\mu\nu}/\mathrm{d}u)\,\tilde{\mathrm{d}}u \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\mu} \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^{\nu}.$$

Из (5.53) легко вывести, что

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{F} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_z - E_y)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_x)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}y \wedge \tilde{\mathrm{d}}z \right.$$

$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_x)\,\tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}y \wedge \tilde{\mathrm{d}}z +$$

$$\left. + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_y - E_z)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}z\right],$$

и если это обращается в нуль, то (пренебрегая статическим полем) мы получаем

$$B_z = E_y, \quad B_y = -E_z, \quad E_x = 0. \qquad (5.66)$$

Упражнение 5.17. Покажите, что из уравнения $\tilde{d}{}^*\tilde{F} = 0$ следует, что

$$B_z = E_y, \quad B_y = -E_z, \quad E_x = 0. \qquad (5.67)$$

Теперь мы видим, что электрическое и магнитное поля плоской электромагнитной волны поперечны (т. е. перпендикулярны направлению её распространения) и задаются двумя независимыми функциями $E_y(u)$ и $E_z(u)$, отвечающими двум независимым поляризациям волны.