(Вследствие дуальности магнитных и электрических полей относительно операции* присутствие электрического заряда влечёт для $\tilde{\alpha}$ те же сложности, что и присутствие магнитного для $\tilde{A}$.) Запишите уравнение Максвелла через $\tilde{\alpha}$ и покажите, что $\tilde{\alpha}$ существует лишь в тех областях, в которых нет заряда и которые могут быть стянуты в точку. Сделайте это, найдя $\tilde{\alpha}$ явно для случая одиночного статического изолированного заряда q.

5.14. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ: ПРОСТОЙ ПРИМЕР

Как известно, плоские электромагнитные волны движутся со скоростью света. Рассмотрим специальный тензор Фарадея $F^{\alpha\beta}$, все компоненты которого зависят лишь от $u \equiv t - x$ (напомним, что мы используем систему единиц с $c = 1$):

$$F^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}(t - x) = A^{\alpha\beta}(u). \tag{5.65}$$

При каких условиях он удовлетворяет уравнениям для пустого пространства $\mathrm{d}\tilde{F} = 0$, $\mathrm{d}^*\tilde{F} = 0$? Из (5.65) следует, что

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{F} = \tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}\tilde{\mathrm{d}}x^\mu \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^\nu\right) = \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{d}}(F_{\mu\nu})\,\tilde{\mathrm{d}}x^\mu \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^\nu$$
$$= \frac{1}{2}(\mathrm{d}A_{\mu\nu}/\mathrm{d}u)\,\tilde{\mathrm{d}}u \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^\mu \wedge \tilde{\mathrm{d}}x^\nu.$$

Из (5.53) легко вывести, что

$$\tilde{\mathrm{d}}\tilde{F} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_z - E_y)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(B_x)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}y \wedge \tilde{\mathrm{d}}z\right.$$
$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_x)\,\tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}y \wedge \tilde{\mathrm{d}}z +$$
$$\left.+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(-B_y - E_z)\,\tilde{\mathrm{d}}t \wedge \tilde{\mathrm{d}}x \wedge \tilde{\mathrm{d}}z\right],$$

и если это обращается в нуль, то (пренебрегая статическим полем) мы получаем

$$B_z = E_y, \quad B_y = -E_z, \quad E_x = 0. \tag{5.66}$$

Упражнение 5.17. Покажите, что из уравнения $\tilde{d}^*\tilde{F} = 0$ следует, что

$$B_z = E_y, \quad B_y = -E_z, \quad E_x = 0. \tag{5.67}$$

Теперь мы видим, что электрическое и магнитное поля плоской электромагнитной волны поперечны (т. е. перпендикулярны направлению её распространения) и задаются двумя независимыми функциями $E_y(u)$ и $E_z(u)$, отвечающими двум независимым поляризациям волны.