D. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

5.15. РОЛЬ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИ

Под «идеальной» мы понимаем жидкость, не обладающую вязкостью и движущуюся адиабатически, т. е. без теплообмена. Хорошо известно, что такая жидкость подчиняется определённым локальным законам сохранения: каждый элемент жидкости в процессе своего движения сохраняет постоянную массу, энтропию и, в некотором смысле, интенсивность вихрей скорости. Эти законы сохранения обычно выводятся с помощью традиционного векторного анализа и могут показаться довольно сложными. С геометрической точки зрения наличие некоего потока немедленно наводит на мысль использовать производную Ли, и, действительно, мы сейчас продемонстрируем, как проясняются локальные законы сохранения, если работать с производными Ли.

5.16. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ВРЕМЕНИ

Как мы видели в упр. 4.22, уравнение неразрывности, обычно записываемое в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\bar{V})=0,$$

можно представить в виде

$$\blacklozenge \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\pounds_{\bar{V}}\right)(\rho\tilde{\omega})=0, \tag{5.68}$$

где $\tilde{\omega}=\tilde{d}x\wedge \tilde{d}y\wedge\tilde{d}z$ — три-форма объёма в эвклидовом пространстве. Оператор $(\partial/\partial t+\pounds_{\bar{V}})$ естественно считать оператором дифференцирования по времени, связанным с данным элементом жидкости. Чтобы это понять, представим себе не наше обычное пространство, а галилеево пространство-время — четырёхмерное многообразие с координатами (x, y, z, t) (см. § 2.10). Любая гиперповерхность $t=\text{const}$ есть эвклидово пространство. Движение элемента жидкости описывается кривой в пространстве-времени, называемой мировой линией этого элемента. На рис. 5.3 изображены две такие мировые линии (AA' и BB'). За бесконечно-малый промежуток времени dt точка на этой кривой перемещается из положения с координатами (x, y, z, t) в положение с координатами $(x+V^x\mathrm{d}t,\ y+V^y\mathrm{d}t,\ z+V^z\mathrm{d}t,\ t+\mathrm{d}t)$. Если обозначить через $\bar{U}$ вектор, касательный к мировой линии в четырёхмерном многообразии, то он, очевидно, будет иметь компоненты $(V^x, V^y, V^z, 1)$. Мы видим, что полная производная по времени, связанная с элементом жидкости, есть просто $\pounds_{\bar{U}}$ —