D. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

5.15. РОЛЬ ПРОИЗВОДНЫХ ЛИ

Под «идеальной» мы понимаем жидкость, не обладающую вязкостью и движущуюся адиабатически, т. е. без теплообмена. Хорошо известно, что такая жидкость подчиняется определённым локальным законам сохранения: каждый элемент жидкости в процессе своего движения сохраняет постоянную массу, энтропию и, в некотором смысле, интенсивность вихрей скорости. Эти законы сохранения обычно выводятся с помощью традиционного векторного анализа и могут показаться довольно сложными. С геометрической точки зрения наличие некоего потока немедленно наводит на мысль использовать производную Ли, и, действительно, мы сейчас продемонстрируем, как проясняются локальные законы сохранения, если работать с производными Ли.

5.16. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ПО ВРЕМЕНИ

Как мы видели в упр. 4.22, уравнение неразрывности, обычно записываемое в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{V}) = 0,$$

можно представить в виде

$$◆ \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right)(\rho \tilde{\omega}) = 0, \tag{5.68}$$

где $\tilde{\omega} = \tilde{d}x \wedge \tilde{d}y \wedge \tilde{d}z$ — три-форма объёма в эвклидовом пространстве. Оператор $(\partial/\partial t + \pounds_{\bar{V}})$ естественно считать оператором дифференцирования по времени, связанным с данным элементом жидкости. Чтобы это понять, представим себе не наше обычное пространство, а галилеево пространство-время — четырёхмерное многообразие с координатами (x, y, z, t) (см. § 2.10). Любая гиперповерхность $t = \text{const}$ есть эвклидово пространство. Движение элемента жидкости описывается кривой в пространстве-времени, называемой мировой линией этого элемента. На рис. 5.3 изображены две такие мировые линии (AA' и BB'). За бесконечно-малый промежуток времени dt точка на этой кривой перемещается из положения с координатами (x, y, z, t) в положение с координатами $(x + V^x dt,\ y + V^y dt,\ z + V^z dt,\ t + dt)$. Если обозначить через $\bar{U}$ вектор, касательный к мировой линии в четырёхмерном многообразии, то он, очевидно, будет иметь компоненты $(V^x, V^y, V^z, 1)$. Мы видим, что полная производная по времени, связанная с элементом жидкости, есть просто $\pounds_{\bar{U}}$ —

естественная производная вдоль мировой линии этого элемента.

Упражнение 5.18. Используя равенство (2.7), покажите, что

$$\pounds_{\bar{U}} \bar{W} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right) \bar{W}, \tag{5.69}$$

где $\bar{W}$ — любое векторное поле на гиперповерхности $t =$ const, т. е. любое чисто пространственное векторное поле ($W^t = 0$).

Равенство (5.69), очевидно, выполняется, и если мы заменим $\bar{W}$ *любым* чисто пространственным тензором типа $\binom{n}{0}$, т. е. тензором, «лежащим» в трёхмерном пространстве $t =$ const. Понятие чисто пространственного тензора выглядит

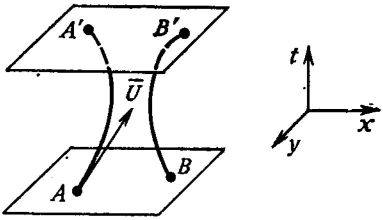

Рис. 5.3. Два момента галилеева времени и мировые линии AA' и BB' двух частиц. Вектор $\bar{U}$ касателен к кривой AA', параметризованной временем t.

неправомерным — оно неинвариантно относительно замены координат в четырёхмерном многообразии, поскольку «чистая пространственность» означает просто, что все t-компоненты тензора равны нулю. Но в нашем случае оно приемлемо, так как в нерелятивистской физике между пространством и временем проводится чёткая грань.

Упражнение 5.19. Наиболее общий вид преобразований координат, сохраняющих свою «естественность» по отношению к расслоенной структуре галилеева пространства-времени (§ 2.10), — это

$$t' = g(t); \quad x^{i'} = f^{i'}(x^i, t), \quad i = 1, 2, 3. \tag{5.70}$$

Покажите, что $\binom{n}{0}$-тензор A, не имеющий временных компонент $(\mathsf{A}(\ldots, \tilde{\omega}^t, \ldots) = 0)$, сохраняет это свойство при таких преобразованиях и $\binom{0}{n}$-тензор B, не имеющий пространственных компонент (т. е. лишь $B_{t \ldots t}$ не нуль), тоже остается чисто временным.