5.17. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Условие адиабатичности движения означает, что полная энтропия элемента жидкости должна сохраняться. Удобно работать с *удельной* энтропией S (энтропией на единицу массы). Очевидно, что при движении она должна оставаться *постоянной*:

$$\blacklozenge \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\pounds_{\bar{V}}\right)S=0. \tag{5.71}$$

Движение жидкости с давлением p, находящейся в гравитационном поле с потенциалом Φ, описывается уравнением Эйлера, которое в декартовой системе координат выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial t}V^i+V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V^i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}p+\frac{\partial}{\partial x^i}\Phi=0. \tag{5.72}$$

Есть две причины, по которым это уравнение верно лишь в декартовых координатах. Во-первых, некоторые индексы i — верхние, а некоторые — нижние, а это безразлично лишь в ортонормированном базисе. Во-вторых, член $\partial V^i/\partial x^j$ преобразуется как $\binom{1}{1}$-тензор, *только* если матрица преобразования $\Lambda^{i'}_j$ не зависит от точки (упр. 4.5), что выполняется при переходе от одной декартовой системы к другой. Стандартный способ приспособить уравнение к произвольной системе координат заключается во введении ковариантной производной, которая определяется в главе, посвященной римановой геометрии. Здесь мы покажем, что имеется другой, и весьма поучительный, подход. Сначала заметим, что первые два слагаемых в (5.72) можно записать как

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V^j\frac{\partial V_i}{\partial x^j},$$

поскольку в декартовых координатах нет разницы между V^i и V_i. (Здесь мы, конечно же, воспользовались тем, что в трёхмерном пространстве есть метрический тензор.) Затем заменим производную $V^j\partial V_i/\partial x^j$ производной Ли (формула (3.14)) *один-формы* $\tilde{V}=\mathrm{g}(\bar{V},\ )$:

$$\begin{aligned}(\pounds_{\bar{V}}\tilde{V})_i&=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i+V_j\frac{\partial}{\partial x^i}V^j\\&=V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(V_jV^j),\end{aligned}$$

где мы опять воспользовались равенством $V_j=V^j$. Итак, мы получаем

$$V^j\frac{\partial}{\partial x^j}V_i=(\pounds_{\bar{V}}\tilde{V})_i-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}V^2\right). \tag{5.73}$$

Оба слагаемых в правой части — это тензоры в произвольной системе координат! Таким образом, (5.72) приобретает бескоординатный вид

$$\blacklozenge \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right) \tilde{V} + \frac{1}{\rho} \tilde{d} p + \tilde{d} \left(\Phi - \frac{1}{2} V^2\right) = 0. \tag{5.74}$$

Роль метрики в этом выражении несколько завуалированна, но является решающей: она нужна, чтобы $\bar{V}$ превратить в $\tilde{V}$ и получить отсюда $\bar{V}^2 = \tilde{V}(V)$.

5.18. СОХРАНЕНИЕ ВИХРЕЙ

Теперь мы можем заняться вопросом о сохранении вихрей. В обычных обозначениях вихрь — это ротор скорости $\nabla \times \bar{V}$. Как мы видели в гл. 4, это по существу внешняя производная $\tilde{d}\tilde{V}$. Раз внешняя производная и производная Ли коммутируют (конечно, $\tilde{d}$ и $\partial/\partial t$ тоже коммутируют, поскольку в $\tilde{d}$ входят только пространственные производные), то мы получаем из (5.74)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right) dV = \frac{1}{\rho^2} d\rho \wedge dp. \tag{5.75}$$

(Для простоты записи мы опустили волны.) Здесь имеются два случая. Рассмотрим сначала более простой, когда жидкость подчиняется уравнению состояния $p = p(\rho)$. Тогда $dp \wedge d\rho \equiv 0$, и мы находим, что два-форма вихря dV удовлетворяет локальному (или конвективному) закону сохранения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right) dV = 0. \tag{5.76}$$

Это *теорема Гельмгольца о циркуляции*, представленная в её наиболее естественном виде. Однако, если имеется более общее уравнение состояния $p = p(\rho, S)$, ответ будет иной. В этом случае в нуль обращается не сама правая часть (5.75), а её внешнее произведение с dS:

$$dS \wedge d\rho \wedge dp = 0. \tag{5.77}$$

Упражнение 5.20. Докажите (5.77).

Внешнее дифференцирование (5.71) даёт

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right) dS = 0, \tag{5.78}$$

а умножив (5.75) внешне на dS, мы получаем

$$dS \wedge \left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\bar{V}}\right) dV = 0.$$