Оба слагаемых в правой части — это тензоры в произвольной системе координат! Таким образом, (5.72) приобретает бескоординатный вид

$$\blacklozenge \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)\tilde{V}+\frac{1}{\rho}\tilde{d}p+\tilde{d}\left(\Phi-\frac{1}{2}V^2\right)=0. \tag{5.74}$$

Роль метрики в этом выражении несколько завуалированна, но является решающей: она нужна, чтобы $\bar{V}$ превратить в $\tilde{V}$ и получить отсюда $\bar{V}^2=\tilde{V}(\bar{V})$.

5.18. СОХРАНЕНИЕ ВИХРЕЙ

Теперь мы можем заняться вопросом о сохранении вихрей. В обычных обозначениях вихрь — это ротор скорости $\nabla\times\bar{V}$. Как мы видели в гл. 4, это по существу внешняя производная $\tilde{d}\tilde{V}$. Раз внешняя производная и производная Ли коммутируют (конечно, $\tilde{d}$ и $\partial/\partial t$ тоже коммутируют, поскольку в $\tilde{d}$ входят только пространственные производные), то мы получаем из (5.74)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)dV=\frac{1}{\rho^2}\,d\rho\wedge dp. \tag{5.75}$$

(Для простоты записи мы опустили волны.) Здесь имеются два случая. Рассмотрим сначала более простой, когда жидкость подчиняется уравнению состояния $p=p(\rho)$. Тогда $dp\wedge d\rho\equiv 0$, и мы находим, что два-форма вихря dV удовлетворяет локальному (или конвективному) закону сохранения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)dV=0. \tag{5.76}$$

Это *теорема Гельмгольца о циркуляции*, представленная в её наиболее естественном виде. Однако, если имеется более общее уравнение состояния $p=p(\rho, S)$, ответ будет иной. В этом случае в нуль обращается не сама правая часть (5.75), а её внешнее произведение с dS:

$$dS\wedge d\rho\wedge dp=0. \tag{5.77}$$

Упражнение 5.20. Докажите (5.77).

Внешнее дифференцирование (5.71) даёт

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)dS=0, \tag{5.78}$$

а умножив (5.75) внешне на dS, мы получаем

$$dS\wedge\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_{\bar{V}}\right)dV=0.$$

Таким образом,

◆ $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\overline{V}}\right) \mathrm{d}S \wedge \mathrm{d}V = 0. \tag{5.79}$$

Это наиболее общий закон сохранения вихрей. Он называется *теоремой Эртеля*.

Смысл три-формы $\mathrm{d}S \wedge \mathrm{d}V$ непосредственно не очевиден, но можно превратить (5.79) в закон сохранения для скаляра. Дело в том, что у нас есть и другая сохраняющаяся три-форма: $\rho\omega$, а в трёхмерном пространстве любые две три-формы пропорциональны. Значит, найдётся скалярная функция α, такая что

$$\mathrm{d}S \wedge \mathrm{d}V = \alpha\rho\omega, \tag{5.80}$$

и из (5.68) и (5.79) получится скалярное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \pounds_{\overline{V}}\right) \alpha = 0.$$

Можно показать, что в общепринятых векторных обозначениях

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \nabla S \cdot \nabla \times V. \tag{5.81}$$

Упражнение 5.21. Докажите (5.81). (Указание: выразите обе части (5.80) через $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.)

В обозначениях гл. 4

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \varepsilon^{ijk} S_{,i} V_{k,j}. \tag{5.82}$$

Таким образом, α *дуальна* к $\mathrm{d}S \wedge \mathrm{d}V$ относительно $\rho\omega$, и сохранение α естественно следует из сохранения $\mathrm{d}S \wedge \mathrm{d}V$: то что $\rho\omega$ сохраняется, означает, что операция дуализации относительно $\rho\omega$ — это тоже сохраняющаяся, т. е. коммутирующая с оператором $(\partial/\partial t + \pounds_{\overline{V}})$, операция.

Упражнение 5.22. В декартовых координатах сдвиг поля скоростей определяется формулой

$$\sigma_{ij} = V_{i,j} + V_{j,i} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\theta, \tag{5.83}$$

где θ — дивергенция поля скоростей:

$$\theta = \nabla \cdot \overline{V}. \tag{5.84}$$

Покажите, что в произвольной системе координат

$$\theta = \frac{1}{2} g^{ij} \pounds_{\overline{V}} g_{ij}, \tag{5.85}$$

$$\sigma_{ij} = \pounds_{\overline{V}} g_{ij} - \frac{1}{3}\theta g_{ij}. \tag{5.86}$$