5.20. АЛГЕБРА ЛИ МАКСИМАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Мы начнем с изучения векторных полей Киллинга на трёхмерном многообразии S. Если $\bar{\xi}$ — вектор Киллинга, то в любой системе координат его компоненты удовлетворяют уравнению

$$(\mathcal{L}_{\xi}\mathrm{g})_{ij} = \xi^k g_{ij,k} + \xi^k{}_{,i} g_{kj} + \xi^k{}_{,j} g_{ik} = 0. \qquad (5.87)$$

Нам будет удобнее пользоваться компонентами один-формы $\mathrm{g}(\bar{\xi},\ )$

$$\xi_k = g_{kl}\xi^l. \qquad (5.88)$$

Они удовлетворяют эквивалентному уравнению

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} - 2\xi_l \Gamma^l{}_{ij} = 0, \qquad (5.89)$$

где, по определению,

$$\Gamma^l{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{lm}(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}). \qquad (5.90)$$

(Определение $\Gamma^k{}_{ij}$, включая множитель $\frac{1}{2}$, общепринято и станет понятным после прочтения гл. 6. Для нас здесь (5.90) — всего лишь удобное сокращение.)

Уравнение (5.89) симметрично относительно i и j, а следовательно, в случае n измерений в нём содержится $n(n+1)/2$ независимых дифференциальных уравнений, шесть при $n = 3$. Поскольку ищутся всего три компоненты вектора $\bar{\xi}$, то система переопределена: у произвольного метрического тензора g векторов Киллинга *нет*. Наша цель — выяснить, каким должен быть g, чтоб он допускал максимальное число векторов Киллинга. Найдём, чему равно это максимальное число. Для этого продифференцируем (5.89):

$$\xi_{i,jk} + \xi_{j,ik} = 2(\xi_l \Gamma^l{}_{ij})_{,k}, \qquad (5.91)$$

прибавим к уравнению (5.91) его же с перестановкой ($i \to k$, $j \to i$, $k \to j$) и вычтем с перестановкой ($i \to j$, $j \to k$, $k \to i$). В результате придём к равенству

$$\xi_{i,jk} = H_{ijk}{}^l \xi_l + K_{ijk}{}^{lm} \xi_{l,m}, \qquad (5.92)$$

где $H_{ijk}{}^l$ — сложного вида функция от компонент g_{ij} и их первых и вторых производных, а $K_{ijk}{}^{lm}$ подобным же образом зависит от g_{ij} и их первых производных. Главный смысл (5.92) состоит в том, что если мы знаем ξ_i и $\xi_{i,j}$ в некоторой точке P и g_{ij} заданы всюду, то из (5.92) мы можем найти $\xi_{i,jk}$ в P, а последующее дифференцирование (5.92) позволяет найти и высшие производные в этой точке. Если наше многообразие аналитично (что мы предположим), то этого достаточно, чтобы определить векторное поле ξ_i всюду. Далее, мы знаем, что значения ξ_i в точке P определяют по формуле (5.89) *симметричную часть* $\xi_{i,j}$ в этой точке. Следовательно, каждое векторное поле Киллинга на S полностью определяется заданием значений

$$\eta_i \equiv \xi_i(P) \quad \text{и} \quad A_{ij} \equiv \xi_{[i,j]}(P) \tag{5.93}$$

в *одной какой-нибудь* точке P. Важно отметить, что, задав $\{\eta_i, A_{ij}\}$ в P, мы вовсе не обязательно определим вектор Киллинга, ведь может случиться, что у (5.92) нет решений: правая часть может оказаться несимметричной по j и k. Но приведённые соображения показывают, что число (линейно-независимых) векторов Киллинга не может быть больше числа независимых выборов $\{\eta_i, A_{ij}\}$, которое в случае m измерений равно

$$m + \frac{1}{2}m(m-1) = \frac{1}{2}m(m+1), \tag{5.94}$$

как следует из (5.93). Многообразие называется *максимально-симметричным*, если на нём имеется максимальное число векторных полей Киллинга.

Легко показать, что максимально-симметричное связное многообразие S однородно. В любой точке P мы можем выбрать векторное поле Киллинга по направлению любого касательного вектора в P. И однопараметрические подгруппы, связанные с векторами Киллинга, могут отобразить точку P в любую другую точку Q, принадлежащую некоторой её окрестности U (см. рис. 5.8). Последовательностью таких отображений, очевидно, можно перевести P в какую угодно точку S. Итак, группа изометрий переводит P в любую точку, и S однородно.

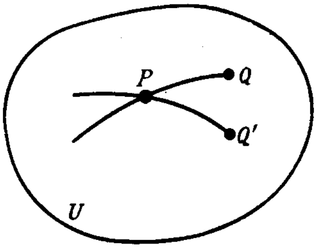

Рис. 5.8. Выбрав подходящую однопараметрическую подгруппу группы изометрий, можно отобразить P в любую точку — хоть в Q, хоть в Q' — окрестности U.

Теперь займёмся группой изотропии точки P. Преобразования из этой группы оставляют P на месте, стало быть, соответствующие векторные поля Киллинга обращаются в нуль в P. Скобка Ли *любых* двух полей Киллинга $\bar{V}$ и $\bar{W}$ равна

$$[\bar{V}, \bar{W}]^i = V^i{}_{,j}W^j - W^i{}_{,j}V^j,$$

или

$$[\bar{V}, \bar{W}]_i = V_{i,j}W^j - W_{i,j}V^j - g_{ik,j}(V^kW^j - W^kV^j). \tag{5.95}$$

Если оба поля $\bar{V}$ и $\bar{W}$ обращаются в нуль в точке P, то то же происходит и с $[\bar{V}, \bar{W}]$. Однако $[\bar{V}, \bar{W}]$ — линейная комбинация векторных полей Киллинга, и, чтобы обратиться в нуль, она должна быть линейной комбинацией полей, которые тоже обращаются в нуль в P. Таким образом, эти поля образуют подалгебру Ли, и ясно, что это — алгебра Ли группы изотропии точки P. Следующее упражнение показывает, что если S пространственно-подобно, то группа изотропии есть $SO(m)$, т. е. что максимально-симметричное пространственно-подобное многообразие изотропно.

Упражнение 5.24. Выберите в точке P координатную систему типа построенной в упр. 2.14, в которой для *пространственно-подобного* многообразия $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ и $g_{ij,k}(P) = 0$.

(a) Покажите, что вблизи P изотропное векторное поле Киллинга даётся формулой

$$V^i = A^i{}_j x^j + O(x^2), \tag{5.96}$$

где $A^i{}_j$ — произвольная антисимметричная матрица:

$$A^i{}_j = -A^j{}_i. \tag{5.97}$$

(b) Пусть $\bar{W}$ — другое изотропное векторное поле Киллинга,

$$W^i = B^i{}_j x^j + O(x^2);$$

покажите, что

$$[\bar{V}, \bar{W}]^i = [A, B]^i{}_j x^j + O(x^2), \tag{5.98}$$

где через $[A, B]^i{}_j$ обозначены элементы матричного коммутатора $A^i{}_j$ и $B^i{}_j$. Отсюда видно, что алгебра Ли группы изотропии совпадает с алгеброй Ли группы $SO(m)$.

(c) Выведите из предыдущего, что группа изотропии точки P есть $SO(m)$.

(d) Покажите, что если g *не* является положительно-определённым (или отрицательно-определённым), то группа изотропии с $SO(m)$ не совпадает. В частности, покажите, что группа изотропии точки P в четырёхмерном пространстве Минковского есть группа Лоренца $L(4)$.

5.21. МЕТРИКА СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Теперь ограничим своё внимание пространственно-подобными трёхмерными многообразиями. В таком случае группа изотропии равна $SO(3)$ и мы говорим, что наше многообразие *сферически-симметрично* в каждой точке. В этом параграфе