Если оба поля $\bar{V}$ и $\bar{W}$ обращаются в нуль в точке P, то то же происходит и с $[\bar{V}, \bar{W}]$. Однако $[\bar{V}, \bar{W}]$ — линейная комбинация векторных полей Киллинга, и, чтобы обратиться в нуль, она должна быть линейной комбинацией полей, которые тоже обращаются в нуль в P. Таким образом, эти поля образуют подалгебру Ли, и ясно, что это — алгебра Ли группы изотропии точки P. Следующее упражнение показывает, что если S пространственно-подобно, то группа изотропии есть $SO(m)$, т. е. что максимально-симметричное пространственно-подобное многообразие изотропно.

Упражнение 5.24. Выберите в точке P координатную систему типа построенной в упр. 2.14, в которой для *пространственно-подобного* многообразия $g_{ij}(P) = \delta_{ij}$ и $g_{ij,k}(P) = 0$.

(a) Покажите, что вблизи P изотропное векторное поле Киллинга даётся формулой

$$V^i = A^i{}_j x^j + O(x^2), \tag{5.96}$$

где $A^i{}_j$ — произвольная антисимметричная матрица:

$$A^i{}_j = -A^j{}_i. \tag{5.97}$$

(b) Пусть $\bar{W}$ — другое изотропное векторное поле Киллинга,

$$W^i = B^i{}_j x^j + O(x^2);$$

покажите, что

$$[\bar{V}, \bar{W}]^i = [A, B]^i{}_j x^j + O(x^2), \tag{5.98}$$

где через $[A, B]^i{}_j$ обозначены элементы матричного коммутатора $A^i{}_j$ и $B^i{}_j$. Отсюда видно, что алгебра Ли группы изотропии совпадает с алгеброй Ли группы $SO(m)$.

(c) Выведите из предыдущего, что группа изотропии точки P есть $SO(m)$.

(d) Покажите, что если g *не* является положительно-определённым (или отрицательно-определённым), то группа изотропии с $SO(m)$ не совпадает. В частности, покажите, что группа изотропии точки P в четырёхмерном пространстве Минковского есть группа Лоренца $L(4)$.

5.21. МЕТРИКА СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТРЁХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Теперь ограничим своё внимание пространственно-подобными трёхмерными многообразиями. В таком случае группа изотропии равна $SO(3)$ и мы говорим, что наше многообразие *сферически-симметрично* в каждой точке. В этом параграфе мы построим систему координат, удобную для предстоящих вычислений. Мы знаем, что интегральные кривые векторных полей Киллинга на группе $SO(3)$ определяют сферы S^2. Поскольку каждая точка принадлежит одной такой сфере, они расслаивают многообразие S. Выберем сферические координаты с обычными углами θ и φ на каждой сфере и с третьей «радиальной» координатой, нумерующей сферы. Для выбора этой координаты имеется один особенно удобный способ.

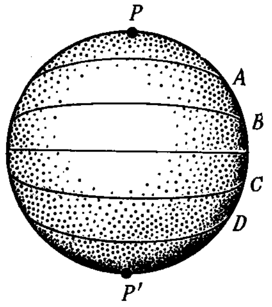

Рис. 5.9. Окружности (параллели) на сфере нумерует радиальная координата, определённая как длина окружности, поделённая на 2π. Это двумерный аналог описанной в тексте ситуации. Сначала радиальная координата возрастает с удалением от P (например, когда мы движемся от A к B), а потом начинает убывать (например, при движении от C к D) и обращается в нуль в точке P'.

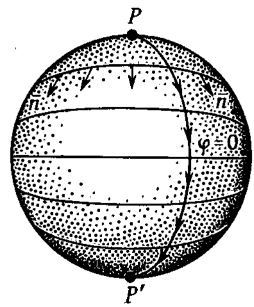

Рис. 5.10. Выбор "полюса" на каждой окружности $r = \text{const}$ на сфере рис. 5.9 посредством требования, чтобы все полюсы лежали на одной интегральной кривой единичного нормального поля $\bar{n}$.

Метрика на S индуцирует на каждой сфере метрический тензор; последний в свою очередь определяет два-форму объёма и полную площадь (интеграл от два-формы объёма). *Определим* радиальную координату r, отвечающую данной сфере, равенством

$$\text{площадь сферы} = 4\pi r^2, \quad r = (\text{площадь сферы}/4\pi)^{1/2}. \tag{5.99}$$

Такая внутренним образом определённая координата не обязана монотонно возрастать всюду (см. рис. 5.9). Но в силу теоремы о приводимости метрики к локально-плоскому виду (упр. 2.14) мы можем утверждать, что это будет хорошая координата по крайней мере в некоторой окрестности P. (При $r = 0$ она, конечно, сингулярна, но мы знаем, как с этим справиться.)

Помимо радиальной координаты надо поаккуратнее определить θ и φ. Мы определили φ и θ на каждой сфере, однако мы не сказали, как связаны полюсы $\theta = 0$ двух разных сфер. А это значит, что при переходе от одной сферы к другой мы можем свободно сдвигать систему координат. Зафиксируем полюсы следующим образом. В каждой точке Q существует вектор $\bar{n}$, нормальный к поверхности сферы ($\mathrm{g}(\bar{n}, \bar{V}) = 0$ для каждого $\bar{V}$ из $T_Q(S^2)$), имеющий единичную длину ($\mathrm{g}(\bar{n}, \bar{n}) = 1$) и направленный прочь от точки P (такой выбор можно корректно произвести вблизи P, а на всё S распространить по непрерывности). Это векторное поле называется единичным нормальным полем; оно принадлежит классу C^∞ всюду, кроме P. Выберем произвольным образом полюс на некоторой сфере S^2, а затем фиксируем полюсы на всех остальных сферах так, чтоб они лежали на интегральной кривой поля $\bar{n}$, проходящей через исходный полюс. Эта процедура проиллюстрирована на рис. 5.10. Очевидно, что при таком выборе *любая* интегральная кривая поля $\bar{n}$ будет линией постоянства θ и φ, иными словами, она будет координатной линией радиальной координаты. Поскольку векторы $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial\varphi$ касательны к сферам, из нашей конструкции следует, что

$$g_{r\theta} = \mathrm{g}(\partial/\partial r, \partial/\partial\theta) = 0, \tag{5.100a}$$

$$g_{r\varphi} = \mathrm{g}(\partial/\partial r, \partial/\partial\varphi) = 0. \tag{5.100b}$$

Далее, метрика каждой из сфер совпадает с метрикой единичной сферы, умноженной на r^2 (именно этот множитель даёт площадь, равную $4\pi r^2$, см. (5.99)).

$$g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\theta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta. \tag{5.100c}$$

Итак, у метрического тензора осталась лишь одна неизвестная компонента, g_{rr}.

Упражнение 5.25. (a) Определим радиальное расстояние от точки P до сферы с координатой r как интеграл

$$\int_0^r (g_{rr})^{1/2}\, \mathrm{d}r \tag{5.101}$$

вдоль линии $\theta = \mathrm{const}$, $\varphi = \mathrm{const}$. Докажите, что компонента g_{rr} должна быть независимой от θ и φ.

(b) Покажите с помощью упр. 2.14, что при приближении к P

$$\lim_{r \to 0} g_{rr} = 1. \tag{5.102}$$

Как видно из упр. 5.25(a), $g_{rr} = f(r)$, и мы получаем метрику

$$(\mathrm{g}) = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.103}$$

Чтобы получить этот ответ, мы использовали лишь группу изотропии P, и нет оснований полагать, что с её помощью мы сможем найти и $f(r)$. Для этого нам понадобятся остальные изометрии S.

5.22. ПОСТРОЕНИЕ ШЕСТИ ВЕКТОРОВ КИЛЛИНГА

Есть несколько способов определить вид функции $f(r)$, гарантирующий однородность S. Предлагаемый же нами метод заключается в построении всех векторных полей Киллинга на S с использованием векторных сферических гармоник, введённых в § 4.29.

Любое векторное поле $\bar{V}$ на S можно записать в виде

$$\bar{V} = \xi_{lm}(r) Y_{lm} \frac{\partial}{\partial r} + \eta_{lm}(r) \bar{Y}^{+}_{lm} + \zeta_{lm}(r) \bar{Y}^{-}_{lm}; \tag{5.104}$$

как здесь, так и в дальнейшем в каждом члене, где индексы l и m повторяются, подразумевается суммирование по ним. Разложим эту формулу по компонентам. Из (4.101) легко получаем

$$\left(\bar{Y}^{+}_{lm}\right)^{\theta} = Y_{lm,\,\theta}; \quad \left(\bar{Y}^{+}_{lm}\right)^{\varphi} = \frac{1}{\sin^2\theta} Y_{lm,\,\varphi}; \tag{5.105a}$$

$$\left(\bar{Y}^{-}_{lm}\right)^{\theta} = \frac{1}{\sin\theta} Y_{lm,\,\varphi}; \quad \left(\bar{Y}^{-}_{lm}\right)^{\varphi} = \frac{-1}{\sin\theta} Y_{lm,\,\theta}. \tag{5.105b}$$

Отсюда следует, что

$$V^r = \xi_{lm} Y_{lm}, \tag{5.106a}$$

$$V^{\theta} = \eta_{lm} Y_{lm,\,\theta} + \zeta_{lm} Y_{lm,\,\varphi}/\sin\theta, \tag{5.106b}$$

$$V^{\varphi} = \eta_{lm} Y_{lm,\,\varphi}/\sin^2\theta - \zeta_{lm} Y_{lm,\,\theta}/\sin\theta. \tag{5.106c}$$

Эти компоненты должны удовлетворять уравнению Киллинга

$$K_{ij} = V^k g_{ij,\,k} + V^k{}_{,i} g_{kj} + V^k{}_{,j} g_{ik} = 0 \tag{5.107}$$

с g_{ij}, определённым формулой (5.103).

В три уравнения $\{K_{\theta\theta} = 0,\ K_{\theta\varphi} = 0,\ K_{\varphi\varphi} = 0\}$ производные от ξ_{lm}, η_{lm} и ζ_{lm} не входят, ими мы и займёмся сначала,