Как видно из упр. 5.25(a), $g_{rr}=f(r)$, и мы получаем метрику

$$(\mathrm{g})=\begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.103}$$

Чтобы получить этот ответ, мы использовали лишь группу изотропии P, и нет оснований полагать, что с её помощью мы сможем найти и $f(r)$. Для этого нам понадобятся остальные изометрии S.

5.22. ПОСТРОЕНИЕ ШЕСТИ ВЕКТОРОВ КИЛЛИНГА

Есть несколько способов определить вид функции $f(r)$, гарантирующий однородность S. Предлагаемый же нами метод заключается в построении всех векторных полей Киллинга на S с использованием векторных сферических гармоник, введённых в § 4.29.

Любое векторное поле $\bar{V}$ на S можно записать в виде

$$\bar{V}=\xi_{lm}(r)Y_{lm}\frac{\partial}{\partial r}+\eta_{lm}(r)\bar{Y}^{+}_{lm}+\zeta_{lm}(r)\bar{Y}^{-}_{lm}; \tag{5.104}$$

как здесь, так и в дальнейшем в каждом члене, где индексы l и m повторяются, подразумевается суммирование по ним. Разложим эту формулу по компонентам. Из (4.101) легко получаем

$$\left(\bar{Y}^{+}_{lm}\right)^{\theta}=Y_{lm,\,\theta};\quad \left(\bar{Y}^{+}_{lm}\right)^{\varphi}=\frac{1}{\sin^2\theta}Y_{lm,\,\varphi}; \tag{5.105a}$$

$$\left(\bar{Y}^{-}_{lm}\right)^{\theta}=\frac{1}{\sin\theta}Y_{lm,\,\varphi};\quad \left(\bar{Y}^{-}_{lm}\right)^{\varphi}=\frac{-1}{\sin\theta}Y_{lm,\,\theta}. \tag{5.105b}$$

Отсюда следует, что

$$V^r=\xi_{lm}Y_{lm}, \tag{5.106a}$$

$$V^{\theta}=\eta_{lm}Y_{lm,\,\theta}+\zeta_{lm}Y_{lm,\,\varphi}/\sin\theta, \tag{5.106b}$$

$$V^{\varphi}=\eta_{lm}Y_{lm,\,\varphi}/\sin^2\theta-\zeta_{lm}Y_{lm,\,\theta}/\sin\theta. \tag{5.106c}$$

Эти компоненты должны удовлетворять уравнению Киллинга

$$K_{ij}=V^k g_{ij,\,k}+V^k{}_{,i}g_{kj}+V^k{}_{,j}g_{ik}=0 \tag{5.107}$$

с g_{ij}, определённым формулой (5.103).

В три уравнения $\{K_{\theta\theta}=0,\ K_{\theta\varphi}=0,\ K_{\varphi\varphi}=0\}$ производные от ξ_{lm}, η_{lm} и ζ_{lm} не входят, ими мы и займёмся сначала, Рассмотрим комбинацию (индексы подняты тензором (5.103))

$$0 = K^{\theta}{}_{\theta} + K^{\varphi}{}_{\varphi} = \frac{4}{r}\xi_{lm}Y_{lm} + 2\eta_{lm}L^2(Y_{lm}),$$

где оператор L^2 определён равенством (3.33). Используя (3.33), получаем

$$[(2/r)\xi_{lm} - l(l+1)\eta_{lm}]\,Y_{lm} = 0.$$

В силу линейной независимости сферических гармоник отсюда следует, что

$$\frac{2}{r}\xi_{lm} - l(l+1)\eta_{lm} = 0. \qquad (5.108)$$

Теперь рассмотрим комбинации

$$0 = \frac{1}{2}(K^{\theta}{}_{\theta} - K^{\varphi}{}_{\varphi}) = F_{lm}\eta_{lm} + G_{lm}\zeta_{lm}, \qquad (5.109a)$$

$$0 = -\frac{1}{r^2 \sin\theta}K_{\theta\varphi} = -G_{lm}\eta_{lm} + F_{lm}\zeta_{lm}, \qquad (5.109b)$$

где через F_{lm} и G_{lm} обозначены следующие выражения:

$$F_{lm} = Y_{lm,\,\theta\theta} - \operatorname{ctg}\theta Y_{lm,\,\theta} - Y_{lm,\,\varphi\varphi}/\sin^2\theta,$$
$$G_{lm} = 2Y_{lm,\,\theta\varphi}/\sin\theta - 2\operatorname{ctg}\theta Y_{lm,\,\varphi}/\sin\theta.$$

Система (5.109) имеет лишь тривиальное решение $\zeta_{lm} = \eta_{lm} = 0$ при отличном от нуля детерминанте. Последний равен $(F_{lm})^2 + (G_{lm})^2$ и, значит, обращается в нуль, только если и F_{lm} и G_{lm} — нули. Нетрудно убедиться, что это может быть лишь при $l = 0,\ 1$ (m любое). Но, как видно из (5.106), при $l = 0$ ни η, ни ζ ненулевого вклада не дают (опять теорема о неподвижной точке для S^2!), и в итоге мы получаем

$$\begin{aligned} &l = 1:\ \eta_{1m},\ \zeta_{1m}\ \text{произвольны},\\ &l \geqslant 2:\ \eta_{lm},\ \zeta_{lm} = 0. \end{aligned} \qquad (5.110)$$

В силу (5.108) имеем

$$\begin{aligned} &l = 0:\ \xi_{00} = 0,\\ &l = 1:\ \xi_{1m} = r\eta_{1m},\\ &l \geqslant 2:\ \xi_{lm} = 0. \end{aligned} \qquad (5.111)$$

Теперь займёмся тремя другими уравнениями в (5.107). Первое даёт скаляр относительно вращений:

$$0 = K_{rr} = (2f\xi_{lm,\,r} + f_{,r}\xi_{lm})\,Y_{lm};$$

следовательно,

$$f\xi_{lm,\,r} + \frac{1}{2}f_{,r}\xi_{lm} = 0. \qquad (5.112)$$

Два оставшихся уравнения $K_{r\theta} = K_{r\varphi} = 0$ относительно вращений образуют вектор. Дивергенция этого вектора (относительно объёма на S^2) равна

$$0 = (\sin\theta K_r{}^\theta)_{,\theta} + (\sin\theta K_r{}^\varphi)_{,\varphi} =$$

$$= \left(\eta_{lm,r} + \frac{1}{r^2} f\xi_{lm}\right)\sin\theta L^2(Y_{lm}),$$

откуда следует, что (при $l > 0$)

$$\eta_{lm,r} + \frac{1}{r^2} f\xi_{lm} = 0. \tag{5.113}$$

Наконец, для получения последнего уравнения можно взять дивергенцию от дуальной к вектору на S^2 величины:

$$0 = K_{r\theta,\varphi} - K_{r\varphi,\theta} = r^2\zeta_{lm,r}\sin\theta L^2(Y_{lm}),$$

и очевидно, что

$$\zeta_{lm,r} = 0. \tag{5.114}$$

Итак, мы приходим к выводу, что весь вклад от $\overline{Y}_{lm}$ определяется тремя произвольными постоянными $\{\zeta_{1m},\ m = -1, 0, 1\}$. Решение оставшихся трёх уравнений (относительно неизвестных ξ_{1m}, η_{1m} и f) можно выразить через произвольные постоянные K и V_m:

$$f = (1 - Kr^2)^{-1}, \tag{5.115}$$

$$\xi_{1m} = V_m(1 - Kr^2)^{1/2}, \tag{5.116}$$

$$\eta_{1m} = \frac{1}{r} V_m(1 - Kr^2)^{1/2}. \tag{5.117}$$

Упражнение 5.26. Проверьте формулы (5.105), (5.108), (5.109), (5.112)—(5.117).

Упражнение 5.27. Покажите, что векторы Киллинга с $V_m = 0$ — это как раз векторы, отвечающие группе изотропии начала координат ($r = 0$).

Упражнение 5.28. Покажите, что сингулярность η_{1m} при $r \to 0$ — чисто координатный эффект: векторное поле корректно определено в этой точке.

Упражнение 5.29. Положите $K = 0$ в (5.115—117) и покажите, что в этом случае S совпадает с E^3 (эвклидовым пространством). Найдите постоянные V_m, определяющие векторы Киллинга $\{\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z\}$, при условии что декартовы координаты получены из наших полярных обычным образом.