5.23. ОТКРЫТАЯ, ЗАМКНУТАЯ И ПЛОСКАЯ ВСЕЛЕННЫЕ

Теперь мы располагаем полным описанием геометрии однородных и изотропных пространств космологических моделей: они имеют метрический тензор вида

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (1-Kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.118}$$

Остаётся лишь понять, как эта геометрия выглядит, и поможет в этом нам следующая замена координат.

Упражнение 5.30. Найдите преобразование координат от r к χ, приводящее метрический тензор к виду

при $K > 0$:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{K}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{5.119a}$$

при $K < 0$:

$$(g_{ij}) = \frac{1}{|K|}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sh}^2\chi & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{sh}^2\chi\,\mathrm{sh}^2\theta \end{pmatrix}. \tag{5.119b}$$

Теперь видно, что геометрия фактически зависит лишь от знака K. Абсолютная величина K служит просто всеобщим масштабным множителем.

В случае $K > 0$ площадь сферы с координатой χ равна $4\pi \times \sin^2\chi/K$. При увеличении χ от $\chi = 0$ до $\chi = \pi$ она сначала возрастает, достигая максимума при $\chi = \pi/2$, а потом убывает до нуля в точке $\chi = \pi$, что напоминает нам ситуацию на сфере S^2 (рис. 5.9). И действительно, фактически мы имеем дело с метрикой сферы S^3 радиуса $K^{-1/2}$. Поскольку это пространство конечно, такая Вселенная называется *замкнутой.*

Упражнение 5.31. Найдите в E^4 преобразование, переводящее декартовы координаты $\{x^i\} = \{w, x, y, z\}$ в сферические координаты $\{x^{i'}\} = \{r, \chi, \theta, \varphi\}$, в которых метрика $g_{ij} = \delta_{ij}$, ограниченная на сферу S^3: $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = K^{-1}$, будет иметь компоненты (5.119а).

Случай $K = 0$ был разобран в упр. 5.29. Это — *плоская* Вселенная.

Случай $K < 0$ — это *открытая* Вселенная, и его труднее всего представить. Площадь поверхности сферы с радиальной координатой χ равна $4\pi\,\mathrm{sh}^2\chi/|K|$ и растёт с ростом K всё быстрее и быстрее. Эта Вселенная неограниченна.

Упражнение 5.32. (a) Рассмотрев соотношение между площадью сфер $\chi = \text{const}$ и расстоянием от сферы до начала координат $\chi = 0$ (см. (5.101)), докажите, что метрика (5.119b) не является ограничением эвклидовой метрики на подмногообразие в E^n ни для какого n и *ни для какого* подмногообразия в E^n.

(b) Найдите подмногообразие в пространстве Минковского, имеющее метрику (5.119b).

В случае когда для уравнений Эйнштейна выбраны однородные и изотропные начальные данные (речь идёт не об одной геометрии, а ещё и о переменных, описывающих материю), последующее развитие Вселенной эту симметрию сохраняет. Следовательно, единственная геометрическая характеристика, которая может меняться со временем, — это масштабный множитель K: со временем Вселенная становится «больше» или «меньше». Однако следует проявить осторожность и не делать зависящих от координат утверждений. В замкнутой Вселенной, имеющей конечный полный объём изменение K вызывает изменение полного объёма. Но плоская и открытая Вселенные бесконечны, и говорить об их полном объёме не имеет смысла. Тем не менее общая теория относительности позволяет смотреть на систему координат, в которой записаны формулы (5.119), как на «сопровождающую»: в любой малой области Вселенной локальная система покоя галактик не меняет своих координат $\{\chi, \theta, \varphi\}$ при изменении времени. Отсюда следует, что изменения K приводят к изменению расстояния между галактиками, а это как раз то, что имеют в виду, говоря о расширяющейся Вселенной. В «стандартных моделях», предполагающих однородность, изотропность и ряд других свойств, все три типа Вселенной начинают своё существование с нулевого «объёма» ($K = \infty$) — с «большого взрыва» — и затем расширяются. Замкнутая Вселенная расширяется до некоторого максимума, а потом опять сжимается, скорость расширения плоской Вселенной асимптотически стремится к нулю, а открытая Вселенная расширяется со скоростью, имеющей ненулевой асимптотический предел. Все эти свойства следуют из уравнений Эйнштейна. Однако для понимания этих уравнений необходимо ввести на многообразии еще одну дополнительную структуру — аффинную связность. Она составляет предмет гл. 6.

5.24. БИБЛИОГРАФИЯ

Краткое и прекрасно написанное введение в термодинамику — книга Э. Ферми, «Термодинамика» (Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973). Теорема Каратеодори обсуждается в книге S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure (Dover, New York, 1958), а на более современном уровне — в книге R. Hermann, Differential Geometry and the Calculus of Variations (Academic Press, New York, 1968).