

Упражнение 5.32. (а) Рассмотрев соотношение между площадью сфер $\chi = \text{const}$ и расстоянием от сферы до начала координат $\chi = 0$ (см. (5.101)), докажите, что метрика (5.119b) не является ограничением эвклидовой метрики на подмногообразии в E^n ни для какого n и ни для какого подмногообразия в E^n .

(б) Найдите подмногообразие в пространстве Минковского, имеющее метрику (5.119b).

В случае когда для уравнений Эйнштейна выбраны однородные и изотропные начальные данные (речь идёт не об одной геометрии, а ещё и о переменных, описывающих материю), последующее развитие Вселенной эту симметрию сохраняет. Следовательно, единственная геометрическая характеристика, которая может меняться со временем, — это масштабный множитель K : со временем Вселенная становится «больше» или «меньше». Однако следует проявить осторожность и не делать зависящих от координат утверждений. В замкнутой Вселенной, имеющей конечный полный объём изменение K вызывает изменение полного объёма. Но плоская и открытая Вселенные бесконечны, и говорить об их полном объёме не имеет смысла. Тем не менее общая теория относительности позволяет смотреть на систему координат, в которой записаны формулы (5.119), как на «сопровождающую»: в любой малой области Вселенной локальная система покоя галактик не меняет своих координат $\{\chi, \theta, \varphi\}$ при изменении времени. Отсюда следует, что изменения K приводят к изменению расстояния между галактиками, а это как раз то, что имеют в виду, говоря о расширяющейся Вселенной. В «стандартных моделях», предполагающих однородность, изотропность и ряд других свойств, все три типа Вселенной начинают своё существование с нулевого «объёма» ($K = \infty$) — с «большого взрыва» — и затем расширяются. Замкнутая Вселенная расширяется до некоторого максимума, а потом опять сжимается, скорость расширения плоской Вселенной асимптотически стремится к нулю, а открытая Вселенная расширяется со скоростью, имеющей ненулевой асимптотический предел. Все эти свойства следуют из уравнений Эйнштейна. Однако для понимания этих уравнений необходимо ввести на многообразии еще одну дополнительную структуру — аффинную связность. Она составляет предмет гл. 6.

5.24. БИБЛИОГРАФИЯ

Краткое и прекрасно написанное введение в термодинамику — книга Э. Ферми, «Термодинамика» (Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973). Теорема Каратеодори обсуждается в книге S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover, New York, 1958), а на более современном уровне — в книге R. Hermann, *Differential Geometry and the Calculus of Variations* (Academic Press, New York, 1968).

Наше обсуждение гамильтоновой механики близко по духу к изложению, данному в R. Abraham & J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed. (Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978). Познакомиться с теми же понятиями, но без всякой геометрии можно по книгам Голдстейн Г. *Классическая механика* (М.: Наука, 1975) или Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика*, т. I. *Механика* (М.: Наука, 1975). Привлекая канонические сохраняющиеся величины, проще понять некоторые явления неустойчивости в жидкостях, см. J. L. Friedman & V. F. Schutz, *Astrophys. J.* **221**, 937—957 (1978); **222**, 281—296 (1978). Ряд полезных статей по гамильтоновой механике с геометрической точки зрения можно найти в сборнике *Topics in Nonlinear Dynamics — A Tribute to Sir Edward Bullard*, ed. S. Jorna, American Institute of Physics, 1978; A. I. P. Conference Proceeding no. 46. Интересный пример использования дифференциальных форм для вывода необходимых и достаточных условий того, что система динамических уравнений имеет гамильтонову (т. е. симплектическую) структуру, приведён в книге R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics. I — The Inverse Problem in Newtonian Mechanics* (Springer, Berlin, 1978).

Введение в теорию электромагнетизма, включающее релятивистскую формулировку теории, дано в книге Д. Джексона «Классическая электродинамика» (М.: Мир, 1965). Продолжение и развитие нашего изложения можно найти в книге Ч. Мизнера, К. Торна, Дж. Уилера «Гравитация» (М.: Мир, 1977). Развёрнутое изложение теории релятивистских волновых уравнений см. в книге F. G. Friedlander, *The Wave Equations on a Curved Space Time* (Cambridge University Press, 1976). Уилеров «заряд без заряда» обсуждается в статьях, воспроизведённых в сборнике J. A. Wheeler, *Geometrodynamics* (Academic Press, New York, 1962). Неориентируемая модель заряда, принадлежащая Соркину, описана в статье R. Sorkin, *J. Phys. A* **12**, 403—421 (1979).

Введение в гидродинамику, включающее теорему Гельмгольца, дано в книгах: Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика*, *Механика сплошных сред* (М.: Гостехиздат, 1954); Ламб Г. *Гидродинамика* (М.: Гостехиздат, 1947). То, что мы назвали теоремой Эртеля, на самом деле есть лишь частный случай результата, полученного Х. Эртелем (H. Ertel, *Meteorologische Zeitschrift* **59**, 277 (1942)). Мы вкратце касались свойств многообразия, называемого «галилеевым пространством-временем», на котором разыгрывается нерелятивистская физика. Исследование его структуры требует привлечения понятия аффинной связности, разбираемого в следующей главе; см. указанную выше книгу Мизнера, Торна и Уилера, где содержится весьма прозрачное обсуждение вопроса, или книгу R. Hermann, *Topics in General Relativity* (Math-Sci Press, Brooklyn, Mass., 1973), где дано более техническое изложение. Использование производных Ли в механике сплошных сред особенно плодотворно в теории упругости. Действительно, сформулировать обще-релятивистскую теорию упругости без помощи такого аппарата чрезвычайно трудно. См. V. Carter & H. Quintana, *Proc. Roy. Soc. London*, **A331**, 57 (1972) или V. Carter, *Proc. Roy. Soc. London*, **A**, to be published.

Космология рассматривается в большинстве учебников по общей теории относительности. В нашем изложении использованы элементы из книги С. Вейнберга «Гравитация и космология» (М.: Мир, 1975) и всё той же книги Мизнера и др. Более простое введение см. у M. Berry, *Principles of Cosmology and Gravitation* (Cambridge University Press, 1977). С астрофизической и экспериментально-наблюдательной точек зрения космология обсуждается в указанной книге Вейнберга и в книге P. J. E. Peebles, *Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1971) [имеется перевод: Пиблс П. *Физическая космология*. — М.: Мир, 1975]. Однородные, но не обязательно изотропные космологии исследуются с помощью методов теории групп в книге M. P. Ryan & L. C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press, 1975).