второго закона термодинамики вытекает интегрируемость $\tilde{\delta}Q$ на равновесном многообразии и существование функции энтропии у композитных систем, находящихся в равновесии.

В. ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

5.4. ГАМИЛЬТОНОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Построение гамильтонова формализма начинается с функции Лагранжа $\mathscr{L}(q, q_{,t})$ динамической системы с координатой $q(t)$. Импульс определяется как

$$p = \partial\mathscr{L}/\partial(q_{,t}), \tag{5.13}$$

а функция Гамильтона — как

$$H = pq_{,t} - \mathscr{L} = H(p, q). \tag{5.14}$$

Лагранжево уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_{,t}} - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q} = 0 \tag{5.15}$$

вместе с определением p эквивалентно системе

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{dp}{dt}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{5.16}$$

Дадим теперь геометрическое истолкование гамильтоновых уравнений, определив многообразие M с координатами p и q, называемое «фазовым пространством». Определим на M дваформу.

◆ $$\tilde{\omega} \equiv \tilde{\mathrm{d}}p \wedge \tilde{\mathrm{d}}q. \tag{5.17}$$

Рассмотрим на M кривую $\{q = f(t),\ p = g(t)\}$, являющуюся решением системы (5.16). Касательный вектор к этой кривой $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}t = f_{,t}\partial/\partial q + g_{,t}\partial/\partial p$ обладает свойством

◆ $$\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega} = 0, \tag{5.18}$$

которое мы сейчас докажем. Поскольку $\tilde{d}\tilde{\omega} = 0$, то из (4.67) получаем

$$\pounds_{\bar{U}}\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}[\tilde{\omega}(\bar{U})]. \tag{5.19}$$

Но так как $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}}q \otimes \tilde{\mathrm{d}}p - \tilde{\mathrm{d}}p \otimes \tilde{\mathrm{d}}q$, то

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(\bar{U}) &= \langle\tilde{\mathrm{d}}q, \bar{U}\rangle\tilde{\mathrm{d}}p - \langle\tilde{\mathrm{d}}p, \bar{U}\rangle\tilde{\mathrm{d}}q\\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\tilde{\mathrm{d}}p - \frac{dq}{dt}\tilde{\mathrm{d}}q.\end{aligned} \tag{5.20}$$

С другой стороны, поскольку f и g удовлетворяют (5.16), мы имеем

$$\tilde{\omega}(\bar{U}) = \frac{\partial H}{\partial p}\,\tilde{\mathrm{d}}\,p + \frac{\partial H}{\partial q}\,\tilde{\mathrm{d}}\,q = \tilde{\mathrm{d}}\,H. \tag{5.21}$$

Таким образом, $\mathrm{d}\,[\tilde{\omega}(\bar{U})]$ обращается в нуль и (5.18) доказано. Векторное поле $\bar{U}$, удовлетворяющее (5.18), называется *гамильтоновым векторным полем.*

Упражнение 5.2. (a) Докажите, что если $\bar{U}$ — гамильтоново векторное поле, то существует некоторая функция $H(p, q)$, такая что уравнения (5.16) выполнены на интегральных кривых поля $\bar{U}$.

(b) Докажите, что гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования.

Упражнение 5.2(a) позволяет смотреть на гамильтоново поле $\bar{U}$ как на поле касательных к траекториям системы в фазовом пространстве. Заметим, что система *консервативна*, поскольку из (5.16) следует, что

$$\pounds_{\bar{U}} H \equiv \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5.22}$$

5.5. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Координаты p и q задаются не однозначно. Определим *каноническое преобразование* как преобразование, сохраняющее вид $\tilde{\omega}$. Это значит, что новые координаты $P = P(q, p)$ и $Q = Q(q, p)$ будут каноническими, если

$$\tilde{\mathrm{d}}q \wedge \tilde{\mathrm{d}}p = \tilde{\mathrm{d}}Q \wedge \tilde{\mathrm{d}}P. \tag{5.23}$$

Необходимое и достаточное для этого условие:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right) = 1. \tag{5.24}$$

Пример канонического преобразования: $Q = p$, $P = -q$. Менее тривиальный пример строится, если следовать процедуре, использованной нами при выводе тождеств Максвелла в термодинамике. Запишем $p = p(q, Q)$, $P = P(q, Q)$; тогда из (5.23) находим

$$\partial p/\partial Q = -\partial P/\partial q. \tag{5.25}$$

Следовательно, если взять произвольную функцию $F(q, Q)$ и положить

$$p = \partial F/\partial q, \quad P = -\partial F/\partial Q,$$

то (5.25) будет выполняться тождественно. Поэтому мы говорим, что $F(q, Q)$ *генерирует* каноническое преобразование.