С другой стороны, поскольку f и g удовлетворяют (5.16), мы имеем

$$\tilde{\omega}(\bar{U}) = \frac{\partial H}{\partial p}\tilde{\mathrm{d}}p + \frac{\partial H}{\partial q}\tilde{\mathrm{d}}q = \tilde{\mathrm{d}}H. \tag{5.21}$$

Таким образом, $\mathrm{d}[\tilde{\omega}(\bar{U})]$ обращается в нуль и (5.18) доказано. Векторное поле $\bar{U}$, удовлетворяющее (5.18), называется *гамильтоновым векторным полем.*

Упражнение 5.2. (а) Докажите, что если $\bar{U}$ — гамильтоново векторное поле, то существует некоторая функция $H(p, q)$, такая что уравнения (5.16) выполнены на интегральных кривых поля $\bar{U}$.

(b) Докажите, что гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования.

Упражнение 5.2(а) позволяет смотреть на гамильтоново поле $\bar{U}$ как на поле касательных к траекториям системы в фазовом пространстве. Заметим, что система *консервативна*, поскольку из (5.16) следует, что

$$\pounds_{\bar{U}} H \equiv \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{5.22}$$

5.5. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Координаты p и q задаются не однозначно. Определим *каноническое преобразование* как преобразование, сохраняющее вид $\tilde{\omega}$. Это значит, что новые координаты $P = P(q, p)$ и $Q = Q(q, p)$ будут каноническими, если

$$\tilde{\mathrm{d}}q \wedge \tilde{\mathrm{d}}p = \tilde{\mathrm{d}}Q \wedge \tilde{\mathrm{d}}P. \tag{5.23}$$

Необходимое и достаточное для этого условие:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\right) = 1. \tag{5.24}$$

Пример канонического преобразования: $Q = p$, $P = -q$. Менее тривиальный пример строится, если следовать процедуре, использованной нами при выводе тождеств Максвелла в термодинамике. Запишем $p = p(q, Q)$, $P = P(q, Q)$; тогда из (5.23) находим

$$\partial p/\partial Q = -\partial P/\partial q. \tag{5.25}$$

Следовательно, если взять произвольную функцию $F(q, Q)$ и положить

$$p = \partial F/\partial q, \quad P = -\partial F/\partial Q,$$

то (5.25) будет выполняться тождественно. Поэтому мы говорим, что $F(q, Q)$ *генерирует* каноническое преобразование.

Поскольку за независимые переменные в (5.23) можно было бы взять не (q, Q), а любую из пар: (q, P), (p, Q) или (p, P), то соответственно есть четыре типа *производящих функций* канонических преобразований. Более полно этот вопрос исследован у Голдстейна (1975) (см. библиографию в конце главы).

5.6. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ И ОДИН-ФОРМАМИ, УСТАНАВЛИВАЕМОЕ ФОРМОЙ $\tilde{\omega}$

Один из наиболее важных моментов описанного геометрического подхода к гамильтоновой динамике состоит в том, что форма $\tilde{\omega}$ играет ту же роль, какую метрика играет на римановых многообразиях, — задаёт обратимое 1-1-соответствие между векторами и один-формами. Если $\bar{V}$ — векторное поле на M, то мы определяем поле один-форм $\tilde{V}$ формулой

$$\tilde{V} \equiv \tilde{\omega}(\bar{V}), \tag{5.26}$$

или

$$(\tilde{V})_i = \omega_{ij} V^j. \tag{5.27}$$

Аналогично по заданному полю один-форм $\tilde{\alpha}$ определяется (однозначно) векторное поле $\bar{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\omega}(\bar{\alpha}). \tag{5.28}$$

Упражнение 5.3. Докажите, что $\langle \tilde{V}, \bar{V} \rangle = 0$, так что $\tilde{\omega}$ не подходит в качестве обычной метрики.

Упражнение 5.4. Докажите, что если $\tilde{\alpha} = f\tilde{d}q + g\tilde{d}p$, то

$$\bar{\alpha} = g\frac{\partial}{\partial q} - f\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.29}$$

Упражнение 5.5. Докажите, что $\bar{X}$ — гамильтоново векторное поле на M тогда и только тогда, когда $\tilde{X}$ — точная один-форма, т. е. тогда и только тогда, когда существует функция H, такая что $\tilde{X} = \tilde{d}H$, или $\bar{X} = \overline{dH}$.

5.7. СКОБКА ПУАССОНА

Предположим, что на многообразии заданы две функции f и g. Введём векторные поля $\bar{X}_f \equiv \overline{df}$ и $\bar{X}_g \equiv \overline{dg}$ и рассмотрим скаляр

$$\{f, g\} \equiv \tilde{\omega}(\bar{X}_f, \bar{X}_g) = \langle \tilde{d}f, \bar{X}_g \rangle. \tag{5.30}$$

Поскольку $\tilde{\omega} = \tilde{d}q \otimes \tilde{d}p - \tilde{d}p \otimes \tilde{d}q$, мы имеем

$$\bar{X}_g = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{5.31}$$