Поскольку за независимые переменные в (5.23) можно было бы взять не (q, Q), а любую из пар: (q, P), (p, Q) или (p, P), то соответственно есть четыре типа *производящих функций* канонических преобразований. Более полно этот вопрос исследован у Голдстейна (1975) (см. библиографию в конце главы).

5.6. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ И ОДИН-ФОРМАМИ, УСТАНАВЛИВАЕМОЕ ФОРМОЙ $\tilde{\omega}$

Один из наиболее важных моментов описанного геометрического подхода к гамильтоновой динамике состоит в том, что форма $\tilde{\omega}$ играет ту же роль, какую метрика играет на римановых многообразиях, — задаёт обратимое 1-1-соответствие между векторами и один-формами. Если $\bar{V}$ — векторное поле на M, то мы определяем поле один-форм $\tilde{V}$ формулой

$$\tilde{V} \equiv \tilde{\omega}(\bar{V}), \tag{5.26}$$

или

$$(\tilde{V})_i = \omega_{ij}V^j. \tag{5.27}$$

Аналогично по заданному полю один-форм $\tilde{\alpha}$ определяется (однозначно) векторное поле $\bar{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\omega}(\bar{\alpha}). \tag{5.28}$$

Упражнение 5.3. Докажите, что $\langle \tilde{V}, \bar{V} \rangle = 0$, так что $\tilde{\omega}$ не подходит в качестве обычной метрики.

Упражнение 5.4. Докажите, что если $\tilde{\alpha} = f\tilde{d}q + g\tilde{d}p$, то

$$\bar{\alpha} = g\frac{\partial}{\partial q} - f\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.29}$$

Упражнение 5.5. Докажите, что $\bar{X}$ — гамильтоново векторное поле на M тогда и только тогда, когда $\tilde{X}$ — точная один-форма, т. е. тогда и только тогда, когда существует функция H, такая что $\tilde{X} = \tilde{d}H$, или $\bar{X} = \overline{dH}$.

5.7. СКОБКА ПУАССОНА

Предположим, что на многообразии заданы две функции f и g. Введём векторные поля $\bar{X}_f \equiv \overline{df}$ и $\bar{X}_g \equiv \overline{dg}$ и рассмотрим скаляр

$$\{f, g\} \equiv \tilde{\omega}(\bar{X}_f, \bar{X}_g) = \langle \tilde{d}f, \bar{X}_g \rangle. \tag{5.30}$$

Поскольку $\tilde{\omega} = \tilde{d}q \otimes \tilde{d}p - \tilde{d}p \otimes \tilde{d}q$, мы имеем

$$\bar{X}_g = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{5.31}$$