Поскольку за независимые переменные в (5.23) можно было бы взять не (q, Q), а любую из пар: (q, P), (p, Q) или (p, P), то соответственно есть четыре типа *производящих функций* канонических преобразований. Более полно этот вопрос исследован у Голдстейна (1975) (см. библиографию в конце главы).

5.6. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ И ОДИН-ФОРМАМИ, УСТАНАВЛИВАЕМОЕ ФОРМОЙ $\tilde{\omega}$

Один из наиболее важных моментов описанного геометрического подхода к гамильтоновой динамике состоит в том, что форма $\tilde{\omega}$ играет ту же роль, какую метрика играет на римановых многообразиях, — задаёт обратимое 1-1-соответствие между векторами и один-формами. Если $\bar{V}$ — векторное поле на M, то мы определяем поле один-форм $\tilde{V}$ формулой

$$\tilde{V} \equiv \tilde{\omega}(\bar{V}), \tag{5.26}$$

или

$$(\tilde{V})_i = \omega_{ij} V^j. \tag{5.27}$$

Аналогично по заданному полю один-форм $\tilde{\alpha}$ определяется (однозначно) векторное поле $\bar{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\omega}(\bar{\alpha}). \tag{5.28}$$

Упражнение 5.3. Докажите, что $\langle \tilde{V}, \bar{V} \rangle = 0$, так что $\tilde{\omega}$ не подходит в качестве обычной метрики.

Упражнение 5.4. Докажите, что если $\tilde{\alpha} = f\tilde{d}q + g\tilde{d}p$, то

$$\bar{\alpha} = g\frac{\partial}{\partial q} - f\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.29}$$

Упражнение 5.5. Докажите, что $\bar{X}$ — гамильтоново векторное поле на M тогда и только тогда, когда $\tilde{X}$ — точная один-форма, т. е. тогда и только тогда, когда существует функция H, такая что $\tilde{X} = \tilde{d}H$, или $\bar{X} = \overline{dH}$.

5.7. СКОБКА ПУАССОНА

Предположим, что на многообразии заданы две функции f и g. Введём векторные поля $\bar{X}_f \equiv \overline{df}$ и $\bar{X}_g \equiv \overline{dg}$ и рассмотрим скаляр

$$\{f, g\} \equiv \tilde{\omega}(\bar{X}_f, \bar{X}_g) = \langle \tilde{d}f, \bar{X}_g \rangle. \tag{5.30}$$

Поскольку $\tilde{\omega} = \tilde{d}q \otimes \tilde{d}p - \tilde{d}p \otimes \tilde{d}q$, мы имеем

$$\bar{X}_g = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q}, \tag{5.31}$$

в чём можно убедиться, проверив, что $\tilde{\omega}(\bar{X}_g) = \tilde{d}g$. Таким образом, мы получаем

$$\{f, g\} = \langle \tilde{d} f, \bar{X}_g \rangle = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Справа стоит то, что обычно называют *скобкой Пуассона* функций f и g. Определение (5.30) поясняет её геометрический смысл и показывает, что скобка Пуассона действительно не зависит от системы координат. Она зависит только от $\tilde{\omega}$.

Упражнение 5.6. (a) Положив $\bar{X}_H \equiv \overline{\tilde{d}H}$, покажите, что для любой функции K

$$\{K, H\} = \bar{X}_H(K) = dK/dt, \tag{5.32}$$

где t — параметр, такой что $\bar{X}_H = d/dt$. Итак, скобка Пуассона произвольной функции с функцией Гамильтона есть производная по времени от значений этой функции вдоль траектории системы. В частности, интегралы движения имеют нулевую скобку Пуассона с H.

(b) Покажите, что скобки Пуассона удовлетворяют тождеству Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{5.33}$$

для любых функций f, g, h класса C^2.

(c) Используя это, покажите, что

$$[\bar{X}_f, \bar{X}_g] = -\bar{X}_{\{f, g\}}, \tag{5.34}$$

так что гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли.

5.8. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ; СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

На практике мы сталкиваемся с системами, имеющими более чем одну степень свободы, так что имеется не одна, а несколько пар p и q. У частицы в трёхмерном пространстве есть три q и три p, и фазовое пространство шестимерно. Система, содержащая N таких частиц, имеет $6N$-мерное фазовое пространство. Если мы рассмотрим систему общего вида с n степенями свободы, то фазовое пространство будет $2n$-мерным, и все предыдущие результаты останутся в силе, если в качестве два-формы $\tilde{\omega}$ мы возьмем (локально)

$$\tilde{\omega} = \sum_{A=1}^{n} \tilde{d} q_A \wedge \tilde{d} p_A. \tag{5.35}$$