в чём можно убедиться, проверив, что $\tilde{\omega}(\bar{X}_g) = \tilde{d}g$. Таким образом, мы получаем

$$\{f, g\} = \langle \tilde{d} f, \bar{X}_g \rangle = \frac{\partial g}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Справа стоит то, что обычно называют *скобкой Пуассона* функций f и g. Определение (5.30) поясняет её геометрический смысл и показывает, что скобка Пуассона действительно не зависит от системы координат. Она зависит только от $\tilde{\omega}$.

Упражнение 5.6. (a) Положив $\bar{X}_H \equiv \overline{\tilde{d}H}$, покажите, что для любой функции K

$$\{K, H\} = \bar{X}_H(K) = dK/dt, \tag{5.32}$$

где t — параметр, такой что $\bar{X}_H = d/dt$. Итак, скобка Пуассона произвольной функции с функцией Гамильтона есть производная по времени от значений этой функции вдоль траектории системы. В частности, интегралы движения имеют нулевую скобку Пуассона с H.

(b) Покажите, что скобки Пуассона удовлетворяют тождеству Якоби:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{5.33}$$

для любых функций f, g, h класса C^2.

(c) Используя это, покажите, что

$$[\bar{X}_f, \bar{X}_g] = -\bar{X}_{\{f, g\}}, \tag{5.34}$$

так что гамильтоновы векторные поля образуют алгебру Ли.

5.8. МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ; СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

На практике мы сталкиваемся с системами, имеющими более чем одну степень свободы, так что имеется не одна, а несколько пар p и q. У частицы в трёхмерном пространстве есть три q и три p, и фазовое пространство шестимерно. Система, содержащая N таких частиц, имеет $6N$-мерное фазовое пространство. Если мы рассмотрим систему общего вида с n степенями свободы, то фазовое пространство будет $2n$-мерным, и все предыдущие результаты останутся в силе, если в качестве два-формы $\tilde{\omega}$ мы возьмем (локально)

$$\tilde{\omega} = \sum_{A=1}^{n} \tilde{d} q_A \wedge \tilde{d} p_A. \tag{5.35}$$

Эта форма $\tilde{\omega}$ называется *симплектической формой*, а фазовое пространство с этой формой — *симплектическим многообразием.*

Упражнение 5.7. (a) Покажите, что f является интегралом движения, если функция Гамильтона H ли-инвариантна относительно поля $\bar{X}_f \doteq \overline{\mathrm{d}f}$:

$$\pounds_{\bar{X}_f} H = 0. \tag{5.36}$$

(См. упр. 5.6.)

(b) Определим форму объёма $\tilde{\sigma}$ в фазовом пространстве формулой

$$\tilde{\sigma} = \underbrace{\tilde{\omega} \wedge \ldots \wedge \tilde{\omega}}_{n \text{ раз}}, \tag{5.37}$$

где $2n$ — размерность фазового пространства. Покажите, что $\tilde{\sigma} \neq 0$ и что всякое гамильтоново векторное поле $\bar{U}$ имеет нулевую дивергенцию относительно этого элемента объёма. Иными словами, объём в фазовом пространстве сохраняется при эволюции системы во времени. Этот результат известен как *теорема Лиувилля.*

Упражнение 5.8. Сейчас мы докажем правильность сделанного в § 3.12 замечания относительно связи векторов Киллинга и сохраняющихся величин. Для движущейся частицы координаты фазового пространства суть $\{q^A, p_A\} = \{x^i, p_i = mv_i\}$, а функция Гамильтона равна $H = (1/2m) g^{ij} p_i p_j + \Phi(x^i)$. Докажите, что если $\bar{U}$ — вектор Киллинга и функция Φ постоянна вдоль $\bar{U}$, то «сопряжённый момент» вектора Киллинга $p_{\bar{U}} \equiv U^i p_i$ является сохраняющейся величиной. (Указание: Используя упр. 5.7, определите $\bar{X}_f$ как векторное поле в фазовом пространстве, у которого пространственные компоненты те же, что и у $\bar{U}$, а импульсные компоненты нулевые. Покажите, что

$$\pounds_{\bar{X}_f} H = 0,$$

и найдите f из формулы (5.31).)

5.9. ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ; СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ

Особенно просто и наглядно формулируются законы сохранения в случае линейных систем. Линейной называется динамическая система, функция Гамильтона которой имеет вид

$$H = \sum_{A, B=1}^{n} (T^{AB} p_A p_B + V_{AB} q^A q^B), \tag{5.38}$$